

Wissenschaftliche Hausarbeit

zur ERSTEN STAATSPRÜFUNG für das

Lehramt an Gymnasien

Thema:

Planimeter und Integrator - Untersuchungen zu Funktionsweise, mathematischem Hintergrund, Geschichte und Möglichkeiten der themenbereichernden Einbeziehung in den Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe

Eingereicht beim: Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung

Sachsen-Anhalt

Landesprüfungsamt für Lehrämter

am: 30.09.2011

von: Gunnar Surek

Erstgutachter:

Frau Prof. Dr. Karin Richter

Zweitgutachter:

Herr Dr. Rainer Herter

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitende Bemerkungen	4
2	Grundlagen der Flächenbestimmung	8
2.1	Flächenbestimmung ohne technische Hilfsmittel	8
2.2	Zum Verständnis des Begriffs Stammfunktion	14
3	Das Polarplanimeter	18
3.1	Ein geschichtlicher Abriss	18
3.2	Mathematischer Hintergrund und technische Umsetzung	20
3.3	Die Benutzung des Planimeters	22
4	Der Integrgraph	26
4.1	Ein geschichtlicher Abriss	28
4.2	Der mathematische Hintergrund der Funktionsweise	30
4.3	Technische Realisierung des Arbeitsverfahrens	31
4.3.1	Die Bauform nach Abdank-Coradi	31
4.3.2	Die Bauform der Firma Ott	33
4.4	Die Benutzung des Integrgraphen der Firma Ott	35
5	Die schulische Nutzung des Integrgraphen im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe	38
5.1	Anknüpfungspunkte in den Rahmenrichtlinien für Gymnasien in Sachsen-Anhalt	38
5.2	Probleme der Schüler mit der Integralrechnung	40

5.2.1	Ein Blick in die Literatur	40
5.2.2	Lehrermeinungen	41
5.3	Zum Einsatz von Geräten im Mathematikunterricht	44
5.4	Überlegungen zur Nutzung des Integraphen	46
6	Abschließende Bemerkungen	51
	Literaturverzeichnis	52
	Abbildungsverzeichnis	54

1 Einleitende Bemerkungen

Die vorliegende Hausarbeit beschäftigt sich mit zwei - man kann hier durchaus sagen - historischen Geräten zur graphisch-mechanischen Integration bzw. Flächenbestimmung und deren Einbeziehung in den Mathematikunterricht am Gymnasium. Dies mag in Zeiten allgegenwärtiger Digitalisierung, noch dazu unter Berücksichtigung der ständigen Verfügbarkeit hochleistungsfähiger Computer und der allgemeinen Forderung nach intensiver Einbeziehung moderner und damit zeitgemäßer Medien in den Unterricht aller Fächer auf den ersten Blick anachronistisch wirken. Allerdings soll die Verwendbarkeit dieser Geräte hier gar nicht mit dem Ziel untersucht werden, deren Einsatz als die Lösung zu bewerben, vielmehr geht es darum, Ergänzungsmöglichkeiten für den Unterricht anzubieten - Ergänzungen, die den Lernenden etwas bieten, was sie in aller Regel im heutigen Unterricht nicht mehr erleben, nämlich Einblicke in eine Maschine und damit verbunden die Erkenntnis, wie die Maschine zu ihrem Ergebnis kommt. Taschenrechner und Computer als absolut vorherrschende Hilfsmittel des heutigen Mathematikunterrichts können dies nicht bieten, die Mechanik historischer Geräte lässt sich aber durchschauen und gerade aus diesem Erkennen der Funktionsweise kann ein tieferes Verständnis für den zu Grunde liegenden mathematischen Hintergrund erwachsen. Nebenbei stellt sich beim Einsatz sehr gegensätzlicher Unterrichtsmittel, also z.B. Computer auf der einen, ein Integrator auf der anderen Seite, eine sehr willkommene Abwechslung für alle Beteiligten ein; historische Geräte sind aus dem täglichen Erfahrungsschatz schlicht nicht bekannt, so dass ihre Präsentation im Unterricht für sich allein schon Interesse wecken kann, denn bekanntlich liegt im Unbekannten ein Reiz. Dieser Reiz wird noch größer, wenn man mit Erstaunen feststellt, dass das Gerät etwas tut, was man zunächst nicht versteht. Auf das Planimeter bezogen ist es erfahrungsgemäß so, dass großes Staunen einsetzt, wenn man durch bloßes Um-

fahren einer Fläche deren Inhalt bestimmt. Diese Faszination gilt es zu nutzen, um daraus Motivation für die Beschäftigung mit der Mathematik hinter dem Gerät entstehen zu lassen. Leider ist es nach wie vor so, dass mathematikhistorische Betrachtungen kaum Bestandteil des Unterrichts sind; gerade solche Betrachtungen hätten aber das Potential, die Mathematik für einen größeren Personenkreis ansprechend wirken zu lassen.

Neben der fachlichen Betrachtung der im Titel genannten Geräte soll die vorliegende Ausarbeitung auch und vor allem allen interessierten Anwendern als Handreichung im Umgang mit diesen Geräten dienen. Dies hat zur Folge, dass auch kurze Anleitungen zur korrekten Bedienung aufgenommen wurden, was insbesondere deshalb sinnvoll erschien, da Bedienungsanleitungen den Geräten meist nicht mehr beiliegen und zum Teil nur noch schwer beschaffbar sind. Zwar wird in der entsprechenden Fachliteratur die Funktionsweise der Geräte erschöpfend erläutert, allerdings schien es wenig sinnvoll zu sein, auf diese Stellen einfach zu verweisen. Gerade die Kürze und Prägnanz mathematischer Fachliteratur bedingt eine intensive und damit auch zeitaufwendige Beschäftigung mit solchen Textstellen. Um dem interessierten Leser und insbesondere Lehrer einen Anreiz zu geben, sich dennoch mit der Thematik auseinander zu setzen, wurden diese Passagen aufbereitet, um sich mit der Funktionsweise zügig vertraut machen zu können. Danach wird im letzten großen Abschnitt dieser Arbeit der Frage nachgegangen werden, ob die Funktionsweise der Geräte auch mit schulmathematischen Mitteln erfassbar ist und wie eine Einbeziehung dieser Geräte in den Unterricht gestaltet werden könnte. Bei alledem wird innerhalb der vorliegenden Hausarbeit der Integrator im Fokus der Betrachtungen stehen.

Abschließend möchte ich die Gelegenheit nutzen, meinen beiden Gutachtern, Frau Prof. Dr. Richter und Herrn Dr. Herter, für die Bereitstellung eines Polarplanimeters und eines Grundintegrators der Firma Ott, für die Unterstützung

während des anfänglichen Vertrautmachens mit den mir bis dahin noch unbekannten Geräten und für die koordinierende Betreuung während der Entstehung dieser Arbeit zu danken. Ein großer Dank gilt weiterhin der Universität Erlangen-Nürnberg, insbesondere Herrn Wolf vom dortigen Regionalen Rechenzentrum Erlangen, welcher mir freundlicherweise eine Bedienungsanleitung des Integrappen zur Verfügung stellte. Und natürlich möchte ich mich bei meiner Familie, die mir stets den Rücken freigehalten hat, und bei meinen Freunden für die ständige moralische Unterstützung während der Entstehung dieser Hausarbeit bedanken.

Ein Hinweis zum Geleit

Wenn im Folgenden wiederholt von „Schülern“ oder „Lehrern“ oder anderen Personengruppen im grammatikalischen Maskulinum die Rede sein wird, so soll damit keineswegs eine Herabwürdigung oder Geringschätzung des weiblichen Geschlechts zum Ausdruck gebracht werden. Nichts läge dem Verfasser ferner als dies, zumal mit der vorliegenden Ausarbeitung ausdrücklich auch Leserinnen angesprochen werden sollen. Dennoch wird es im Folgenden vermieden werden, Formulierungen wie etwa „Schülerinnen und Schüler“ oder auch „LehrerInnen“ in den Text aufzunehmen. Diese Beschränkung auf das generische Maskulinum erfolgt einzig in dem Bestreben, im laufenden Text eine Anhäufung stilistisch nicht ansprechender Wendungen zu vermeiden.

2 Grundlagen der Flächenbestimmung

Zunächst soll in den folgenden Ausführungen dargelegt werden, welche Problemstellungen geeignet sind, den Einsatz mathematischer Geräte zu motivieren. Darauf aufbauend folgt - zunächst unabhängig von der momentan üblichen Schulpraxis - der Versuch einer Beantwortung der Frage, ob mit schulmathematischen Methoden auch alternativ eine Lösung dieser Problemstellungen erreicht werden kann. Hierbei wird von besonderem Interesse sein, die Zuhilfenahme historischer Geräte im Unterricht nicht als Selbstzweck zu verstehen, sondern unter dem Blickwinkel einer sinnstiftenden und das Verständnis der ohnehin obligatorischen Lehrinhalte zugleich unterstützenden Integration zu betrachten.

2.1 Flächenbestimmung ohne technische Hilfsmittel

Die Bestimmung des Inhaltes einer Fläche wird in der gesamten vorliegenden Arbeit immer wieder das Ausgangsproblem aller Betrachtungen sein, deshalb lohnt es sich durchaus genauer zu untersuchen, wie diese Fragestellung prinzipiell bearbeitet werden kann. Solange die gegebene Fläche als Polygon vorliegt, bereitet die Bestimmung des Flächeninhaltes - zumindest prinzipiell - keine Probleme. Man zerlegt die Fläche in Elementarpolygone, z.B. Dreiecke, Trapeze etc., deren Inhalt leicht berechnet werden kann, und erhält die Gesamtfläche durch Summation dieser Teilflächen.¹ Ist die Fläche allerdings krummlinig und dabei nicht von Kreisbögen begrenzt², so hat ein Schüler der Sekundarstufe I zur Berechnung praktisch keine Möglichkeit mehr. Eine näherungsweise Bestimmung könnte damit nur noch erfolgen, indem ein beliebig feines Raster in

¹Bei sehr unregelmäßig geformten Polygonen wird dieses Verfahren zwar schnell unpraktisch, weil der Rechenaufwand bald in einem unvernünftigen Verhältnis zum Nutzen steht, aber zunächst soll es nur um die Machbarkeit einer möglichst genauen Flächenbestimmung gehen.

²Ist sie von Kreisbögen begrenzt, so kann man Kreissegmente abspalten und verfährt ansonsten wie beschrieben.

die Fläche gelegt und ihr Inhalt ausgezählt wird. Beliebig fein bedeutet dabei, dass durchaus ein Quadratmillimeter-Raster zur Anwendung kommen kann.³ Zur exakten Flächenbestimmung wird den Schülern dann in der Sekundarstufe II, d.h. der gymnasialen Oberstufe, das Hilfsmittel der Integralrechnung in die Hand gelegt. Im einfachsten Falle ist dabei die Fläche zwischen dem Graph einer Funktion und einer Koordinatenachse, in der Regel der Abszissenachse, zu bestimmen. Aber auch beliebige Flächen lassen sich auf diese Weise bestimmen, wenn man davon ausgeht, dass die Fläche von den Graphen mehrerer Funktionen eingeschlossen wird. Auch hier kann man den einfachsten Fall betrachten, dass eine „obere“ und eine „untere“ begrenzende Funktion existiert; durch Differenzbildung der Integrale im betreffenden Intervall wird die eingeschlossene Fläche bestimmt. Auf diese Weise kann der Flächeninhalt prinzipiell exakt bestimmt werden; das Verfahren versagt aber, wenn die begrenzenden Funktionen nicht geschlossen integrierbar sind oder ihre Funktionsgleichungen schlicht nicht bekannt sind. An dieser Stelle muss darauf hingewiesen werden, dass Integrationsregeln wie z.B. jene der partiellen Integration oder der Integration durch Substitution vielfach nicht mehr Bestandteil der verbindlichen Lehrpläne sind. Folglich ist es den Schülern nur in den aller einfachsten Fällen möglich, durch Graphen begrenzte Flächen zu berechnen. In allen Fällen, in denen aus einer praktischen Anwendung heraus, z.B. im Schülerexperiment im Physikunterricht, eine Kurve ermittelt wird, deren Funktionsgleichung dann natürlich zunächst unbekannt ist (z.B. die über die Zeit aufgetragene elektrische Leistung einer Schaltung) und die Fläche unter dem Graphen gesucht ist (im Beispiel ist diese Fläche mit der elektrischen Arbeit zu identifizieren) bleibt dem Schüler nur, die Fläche entweder durch Auszählen zu bestimmen oder näherungsweise eine geschlossen integrierbare Funktionsgleichung für den begrenzenden Graphen zu ermitteln und damit die Integration vorzunehmen. Es ist leicht einzuse-

³Vgl. dazu: Willers, Fr. A.: Mathematische Maschinen und Instrumente. Berlin 1951, S. 121

hen, dass dies demotivierend auf Schüler wirken kann, wenn sie feststellen, dass sie selbst in Klassenstufe 12 ein Problem immer noch nicht exakt bearbeiten können. Letztlich ist mit einem solchen Vorgehen auch nicht zu begründen, warum beim Experimentieren selbst eine gewisse Exaktheit verfolgt werden soll, wenn diese bei der Auswertung nicht beibehalten werden kann. Zeigt man an dieser Stelle Möglichkeiten auf, wie das Integral doch noch bestimmt werden kann, so befreit man sich nicht nur aus dieser Legitimationskrise, sondern fördert auch das tiefere Verständnis für die Integralrechnung, denn gerade die Verfahren zur näherungsweisen Integration sind nur zu verstehen, wenn auch der Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Stammfunktion verstanden worden ist. Im Folgenden sollen nun zwei Verfahren der graphischen Integration kurz vorgestellt werden.⁴ Im Wesentlichen geht es dabei darum zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ ⁵ (bzw. zu deren Graph) eine Funktion $F(x)$ zu finden, deren Steigung an jeder Stelle⁶ gerade so groß ist wie der Funktionswert von $f(x)$ an der betreffenden Stelle.

Konstruktion von Tangenten von $F(x)$

Gegeben ist der Graph einer Funktion $f(x)$. Auf diesem Graph wählt man sich Punkte P_0, P_1, \dots (dies muss nicht äquidistant erfolgen, bei stark gekrümmten Graphen wird man die Stützstellen dichter wählen als bei beinahe linearen Funktionen) und zeichnet durch diese Punkte Parallelen zur x-Achse, die die y-Achse in $\overline{P_0}, \overline{P_1}, \dots$ schneiden. Außerdem ist der sog. Polpunkt $A(-1|0)$ zu markieren. In

⁴Auf Verfahren zur numerischen Integration wird nicht eingegangen. Die Anwendung solcher Verfahren würde letztlich das sture Durchführen einer Rechenroutine bedeuten, ohne dem Schüler ein tieferes Verständnis des Integralbegriffs zu ermöglichen. Die Verfahren der graphischen Integration hingegen stehen in direktem Zusammenhang mit der geometrischen Interpretation des Ableitungsbegriffs, machen also ein Erkennen des 'Warum?' viel leichter möglich.

⁵Im schulischen Analysisunterricht sind Funktionen fast ausschließlich explizit in der Form $y=f(x)$ vorgegeben, deshalb soll nur auf diesen Fall eingegangen werden.

⁶In der vorliegenden Arbeit soll eine strikte Trennung der Begriffe *Steigung* und *Anstieg* eingehalten werden. Von *Anstieg* wird nur im Zusammenhang mit linearen Funktionen gesprochen. Unter der *Steigung* einer Funktion an einer Stelle wird der Anstieg der an dieser Stelle an die Funktion angelegten Tangente verstanden.

Abb. 1 ist das Vorgehen am Beispiel einer linearen Funktion illustriert.⁷ Be-

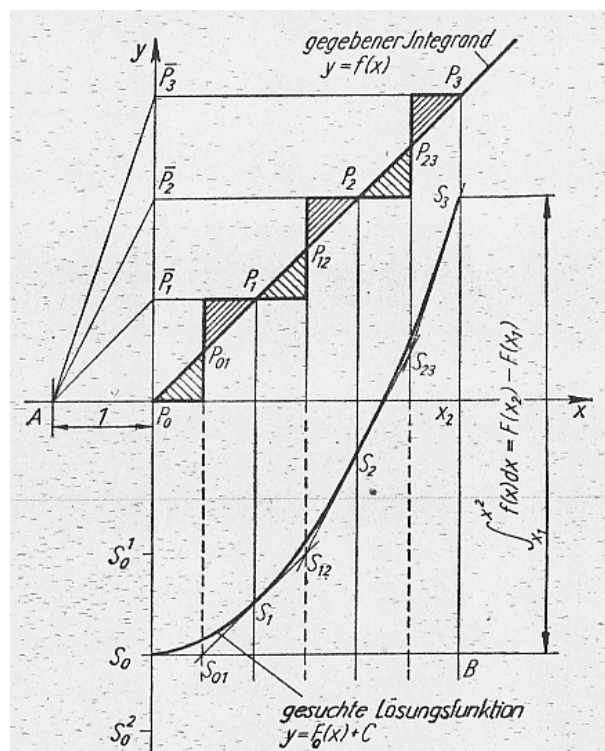


Abbildung 1: Graphische Integration mittels Tangenten

trachtet man ein Dreieck $AO\overline{P}_i$, so gilt $\tan \angle AO\overline{P}_i = \frac{\overline{OP}_i}{1}$, d.h. der Anstieg der Strecke \overline{AP}_i ist genau so groß wie die Ordinate von P_i . Damit hat \overline{AP}_i den gleichen Anstieg wie die Tangente an die gesuchte Kurve $F(x)$. Da $F(x)$ bekanntlich nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist wählt man einen Startpunkt S_0 für $F(x)$ und verschiebt \overline{AP}_0 parallel in diesen Punkt. Zusätzlich wählt man noch Punkte P_{01}, P_{12}, \dots , die etwa in der Mitte der gewählten Intervalle liegen, und konstruiert durch diese Punkte Parallelen zur y-Achse. Der Schnittpunkt dieser Parallele durch P_{01} mit der Tangente durch S_0 ergibt S_{01} ; in diesen Punkt wird die Strecke \overline{AP}_1 parallel verschoben usw. Auf diese Weise ergibt sich ein Tangentenzug. Der gesuchte Graph $F(x)$ kann durch die Punkte S_1, S_2, \dots gezeichnet werden.

⁷Aus: Leupold, W. u.a.: Analysis für Ingenieur- und Fachschulen. 3. Aufl. Leipzig 1968, S. 331

Diese Methode der graphischen Integration ist sehr alt; bereits Abdank-Abakanowicz⁸ gibt eine entsprechende Konstruktionsvorschrift an, allerdings ist sein Verfahren noch nicht so elegant wie das oben beschriebene. Wie in Abb. 2⁹ zu erkennen ist konstruiert er erst eine Reihe von Parallelen zur y-Achse, die untereinander einen gleichen Abstand haben, nimmt dann eine Strecke \overline{AB} als Einheit an und konstruiert schließlich Strecken $\overline{11'}$, $\overline{22'}$, ..., deren Projektion auf die x-Achse gerade dieser angenommenen Einheit \overline{AB} entspricht. Man rechnet

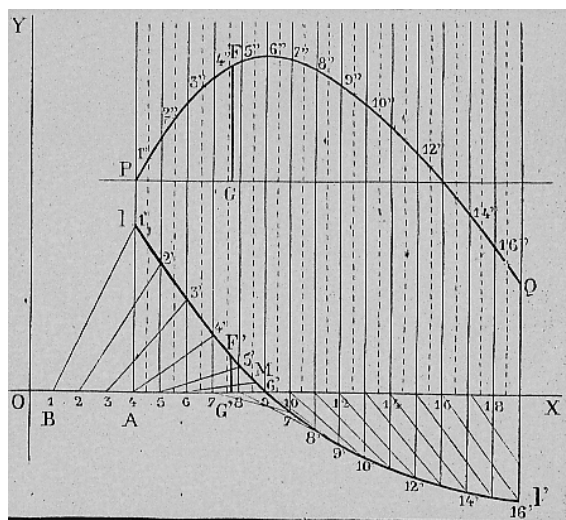


Abbildung 2: Graphische Integration nach Abdank-Abakanowicz.

leicht nach, dass sich auch damit der gesuchte Anstieg ergibt. Die restliche Konstruktion erfolgt auch bei diesem Verfahren durch Parallelverschiebung. Letztlich beruhen beide Verfahren auf der Approximation der gegebenen Funktion $f(x)$ durch eine Treppenfunktion und anschließende stückweise Integration der sich ergebenden Geradenstücke.¹⁰ Wählt man die Intervalle, d.h. den Abstand der Sprungstellen der gedachten Treppenfunktion nicht zu groß, kann trotzdem mit

⁸Vgl. Abdank-Abakanowicz, B.: Die Integrappen. (deutsch bearbeitet von E. Bitterli) Leipzig 1889, S. 3.

⁹Aus: ebenda.

¹⁰Schröder, K.: Mathematik für die Praxis II. Ein Handbuch. 3. berichtigte Auflage. Berlin 1966, S. 343f, geht darauf näher ein und untersucht auch, ob es besser ist die Tangenten an den Sprungstellen oder in der Mitte der Stufen zu konstruieren.

genügender Genauigkeit gearbeitet werden. Hierin liegt auch die Begründung bei stark gekrümmten Graphen die Stützpunkte P_0, P_1, \dots dichter zu wählen; die Treppenfunktion passt sich dem gegebenen Graphen damit besser an.

Das Richtungsfeld einer Differentialgleichung

Bezogen auf die Gleichung $F(x) = \int f(x)dx + C$ wird deutlich, dass es sich bei der Gleichung $y = f(x)$ eigentlich um eine Differentialgleichung 1. Ordnung handelt, nämlich $F'(x) = f(x)$. Jeder Differentialgleichung kann ein sog. Richtungsfeld zugeordnet werden, welches bei Funktionen, die nur von einer Variable abhängig sind, hier also x , sehr einfach zu zeichnen ist. In Abb. 3¹¹ ist dies für eine lineare Funktion durchgeführt. Jedem Punkt der xy -Ebene wird der Wert $f(x)$ zugeordnet. Dieser wird aber nicht als Funktionswert interpretiert, sondern als Tangentenanstieg. Statt einer Tangente wird aber nur eine kurze Strecke, das sog.

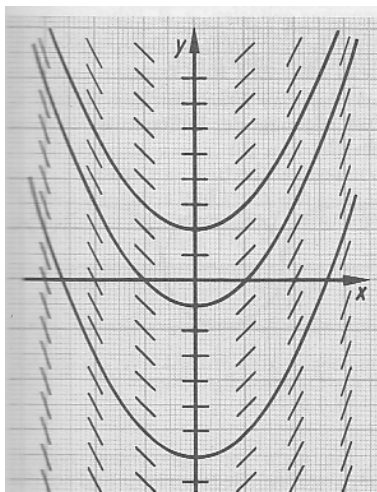


Abbildung 3: Richtungsfeld am Beispiel $F'(x)=x$.

Linienelement konstruiert, welches die Richtung der gesuchten Funktion $F(x)$ im betreffenden Punkt angibt. Bei Funktionen $F'(x)$, die nur von einer Variable abhängig sind, also wie in der Schule, ergibt sich ein besonders einfaches Rich-

¹¹Aus: Gottwald, Prof. Dr. S. u.a. (Hrsg.): Meyers kleine Enzyklopädie Mathematik. 14. neu bearb. und erw. Auflage. Mannheim 1995, S. 543.

tungsfeld, indem der Anstieg der Linienelemente auf Parallelen zur y-Achse konstant ist. Das Richtungsfeld gibt damit einen Überblick über die Gesamtheit der in Frage kommenden Stammfunktionen $F(x)$. Der Vorteil zum zuvor beschriebenen Verfahren besteht darin, dass sofort deutlich wird, dass die Stammfunktion $F(x)$ nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist; nachteilig ist, dass das Zeichnen einer konkreten Stammfunktion damit eher nur ungenauer durchgeführt werden kann. Allerdings ist es möglich eine weitere Funktion in Abb. 3 auf der vorherigen Seite einzuzeichnen, nämlich die sog. Isokline, also die Verbindungslinie von Punkten gleicher Feldrichtung $F'(x) = \text{const.}$; bei Funktionen $y = f(x)$ ergibt dies gerade Parallelen zur y-Achse, wie bereits erwähnt. Auf die Bedeutung der Isoklinen für einen möglichen Unterrichtseinsatz des Integrativen wird in Abschnitt 5 näher eingegangen.

Man sieht, dass beide Verfahren kein tiefer gehendes Fachwissen benötigen; mit elementarem Schulwissen lässt sich der mathematische Hintergrund dieser Näherungslösungen erschließen. Zwar wird man in Anbetracht der Begriffsfülle gerade des naturwissenschaftlichen und mathematischen Schulunterrichts darauf verzichten, noch weitere Fachbegriffe wie z.B. Isokline einzuführen, jedoch zeigt sich, dass es möglich sein kann den Schülern eine Vorstellung vom Verlauf der Stammfunktion auch in den Fällen zu geben, in denen eine rechnerische Integration nicht mehr bewältigt werden kann.

2.2 Zum Verständnis des Begriffs Stammfunktion

In der Regel wird der Begriff Stammfunktion im Unterricht geometrisch-anschaulich motiviert, und zwar zunächst als Umkehrung der Differentiation, d.h. es wird eine Funktion $F(x)$ gesucht, welche Stammfunktion genannt wird, deren erste Ableitung an jeder Stelle gerade dem Funktionswert einer gegebenen Funktion $f(x)$ an dieser Stelle entspricht. Später stellt sich dann heraus,

dass diese Funktion F gerade den Flächeninhalt zwischen der x -Achse und der Funktion f angibt. Ein anderer Einstieg ist jener den Flächeninhalt unter einer Funktion f zu bestimmen, indem man versucht, die Fläche durch Rechtecke auszulegen und deren Flächeninhalt zu bestimmen. Dabei geht man so vor, dass man einerseits der Fläche Rechtecke einbeschreibt und andererseits die Fläche mit Rechtecken umschreibt und dann durch Grenzübergang den tatsächlichen Inhalt bestimmt. Es ergibt sich dann ein analytischer Ausdruck für den Flächeninhalt unterhalb des Graphen und dieser funktionale Zusammenhang wird dann als Stammfunktion bezeichnet. In beiden Fällen werden die Aspekte, einerseits eine Funktion zu finden, die gewisse Eigenschaften aufweist (z.B. Stammfunktion) und andererseits die Fläche unterhalb eines Graphen zu bestimmen, bis zu einem gewissen Punkt getrennt betrachtet. Erst danach erfolgt die Vernetzung, so dass der Schüler von da ab eine Problemstellung in eine Andere überführen und damit eine adäquate Lösungsmethode wählen kann.

Einen anderen Ansatz wählt Abdank-Abakanowicz, siehe Abb. 4 auf der nächsten Seite¹². Von Anfang an verquickt er beide Überlegungen. Zur gegebenen Kurve $abdfg$ stellt er die Aufgabe, eine Kurve $ABCDE$ so zu konstruieren, dass ihre „Ordinaten $KB, FC \dots$ den durch ihre Verlängerung im System der gegebenen Kurve bestimmten Flächen $abc, ade \dots$ proportional sind“¹³. D.h. seine auf diese Weise konstruierte Kurve $ABCDE$ gibt nach Voraussetzung (in gewisser Weise) den Flächeninhalt unterhalb der Kurve $abdfg$ an. Dennoch kann dieses Vorgehen aus den folgenden Gründen nicht überzeugen:

- Es bleibt völlig offen, wie man überprüft, ob diese Forderung eingehalten wird, denn eine Möglichkeit zur Messung der Flächen $abc, ade \dots$ wird nicht angegeben. Die Angabe des Flächeninhalts könnte mittels der Stammfunktion erfolgen, aber diese wird einfach flächenproportional konstruiert, ohne

¹²Aus: Abdank-Abakanowicz: Integraphen, S. 1.

¹³Ebd.

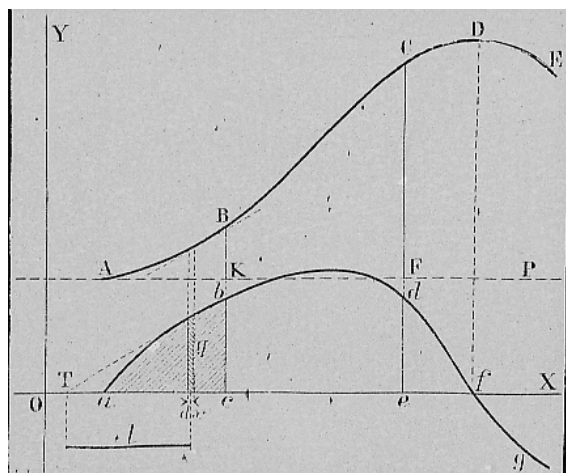


Abbildung 4: Integration nach Abdank-Abakanowicz

darauf zu verweisen, wie dies geschehen soll. Den naheliegenden Verweis auf den Anstieg der Stammfunktion bringt er nicht.

- Die Stammfunktion wird hier gewissermaßen als Flächeninhaltsfunktion definiert. Allerdings zeigt die Abb. 4 eine beliebige Stammfunktion ABCDE. Zur Flächeninhaltsfunktion wird diese tatsächlich erst, wenn man die Ordinatenwerte nicht ab der x-Achse, sondern ab der Geraden durch A und P misst, wie auch er dies macht, wenn er von den Ordinaten KB etc. spricht.

In diesem Sinne ist diese Herleitung als reines Denkmodell zu verstehen, dass man im Schulunterricht besser nicht verwendet, um Verwirrungen zu vermeiden.

Fazit

Es zeigt sich, dass auch mit schulmathematischen Mitteln eine Ermittlung der Stammfunktion in graphischer Form auch dann erreicht werden kann, wenn die rechnerische Integration für die Schüler nicht mehr durchführbar ist. Gleichzeitig wird die Einsicht hervorgebracht, dass diese Methoden teilweise einen erheblichen Arbeitsaufwand bedeuten, so dass der Einsatz technischer Hilfsmittel gerechtfertigt erscheint. Ein solcher Einsatz wäre für das Verständnis des

Integralbegriffs allerdings nicht sonderlich förderlich, wenn das entsprechende Gerät nicht verstanden wird. Deshalb muss untersucht werden, ob auch die Funktion der Geräte mit schulmathematischen Kenntnissen verstanden werden kann.

3 Das Polarplanimeter

„Grundplanimeter [...] dienen zur Ermittlung des bestimmten Integrals $J = \oint y(x) dx$ “¹⁴ Daraus lässt sich bereits einiges über die Funktion dieser Geräte aussagen. Sie liefern eine Aussage über den Inhalt einer Fläche, indem man die Fläche auf einem geschlossenen Kurvenzug umfährt. Das Ergebnis wird als Zahl angezeigt, nämlich als bestimmtes Integral. Durch bloßes Umfahren einer Fläche kann also deren Inhalt bestimmt werden; damit bietet das Planimeter die Möglichkeit zeitsparend einen Flächeninhalt zu bestimmen, wenn das Integral rechnerisch nicht zu ermitteln ist (sei es, dass die Funktionsgleichung der Kurve $y(x)$ nicht geschlossen integrierbar ist oder ihre Gleichung einfach unbekannt ist) und die Näherungsmöglichkeiten aus dem vorigen Kapitel nicht mit vernünftigem Aufwand durchgeführt werden können oder sollen. Für den Schulunterricht kann es dennoch nur als ernstzunehmendes Hilfsmittel betrachtet werden, wenn es gelingt den Schülern die Funktionsweise zu erklären. Der Schwerpunkt der folgenden Betrachtungen wird deshalb sein zu untersuchen, ob mit Kenntnissen der Schulmathematik die Funktionsweise dieses Geräts verstanden werden kann.

3.1 Ein geschichtlicher Abriss

Planimeter im allgemeinen Sinne sind die wohl ältesten Geräte zur Flächenbestimmung. Im engeren Sinne versteht man darunter, wie auch hier geschehen, Geräte, mit denen man durch Umfahren einer Fläche deren Inhalt bestimmt. Willers¹⁵ weist allerdings darauf hin, dass verallgemeinernd auch ältere Geräte als Planimeter bezeichnet werden, mit denen man Flächeninhalte durch Abzäh-

¹⁴Meyer zur Capellen, W.: Mathematische Instrumente. 2. ergänzte Auflage. Leipzig 1944, S. 180.

¹⁵Vgl.: Willers, Fr. A.: Mathematische Maschinen und Instrumente. Berlin 1951, S. 118.

len von Quadraten messen kann; dabei geht die Bezeichnung also offensichtlich vom Ergebnis, der Flächenbestimmung, aus. Ein solches älteres Gerät wurde 1815 bereits von Zobel und Müller entwickelt. Als Planimeter im engeren Sinne, also als Umfahrungsplanimeter, ist jenes anzusehen, dass der Trigonometer Hermann im Herbst 1814 in München entwickelte. Von Galle¹⁶ erfährt man, dass es sich dabei bereits um ein Polarplanimeter handelte. Er gibt auch eine mögliche Begründung, warum ausgerechnet dieser Typ zu den ersten gebauten gehört: bei der Konstruktion des Planimeters könnten Anleihen bei der Kinematik des menschlichen Armes gemacht worden sein. Es folgten eine Reihe von Weiterentwicklungen, bei denen als Integriermechanismus Reibradgetriebe oder aufeinander abrollende Körper und Scheiben verwendet wurden. Ein Mechanismus, wie er auch an dem in dieser Arbeit untersuchten Polarplanimeter der Firma Ott verwendet wurde, nämlich eine Mess- bzw. Integrierrolle, wurde erstmals 1854 von Amsler zum Einsatz gebracht und ein Jahr später, also 1855, unabhängig davon auch bei Miller-Hauenfels in Loeben. Galle¹⁷ verweist allerdings auch darauf, dass Amsler seine Konstruktion erst 1856 zum Patent anmeldete; trotzdem gilt er als Derjenige, der diese Technik in der Praxis durchsetzte. Ab 1874 wurden dann auch in Kempten bei Ott solche Planimeter gebaut. Dabei handelte es sich in der ursprünglichen Ausführung um gewöhnliche Polarplanimeter, obwohl zu dieser Zeit auch das Prinzip der Kompensationspolarplanimeter, bei denen man den Fahrarm unter dem Polarm hindurch führen kann, bereits bekannt war.

¹⁶Vgl.: Galle, A.: Mathematische Instrumente. Leipzig, Berlin 1912, S. 100.

¹⁷Vgl.: Ebd.

3.2 Mathematischer Hintergrund und technische Umsetzung

Das Planimeter besteht aus einem Pol, der als Gewicht ausgebildet ist, einem Polarm, der mit einem Kugelgelenk im Pol geführt wird und sich entsprechend auf einem Kreis bewegt, und einem Fahrarm, der mit dem Polarm wiederum durch ein Kugelgelenk verbunden ist. Der Fahrarm trägt an seinem einen Ende

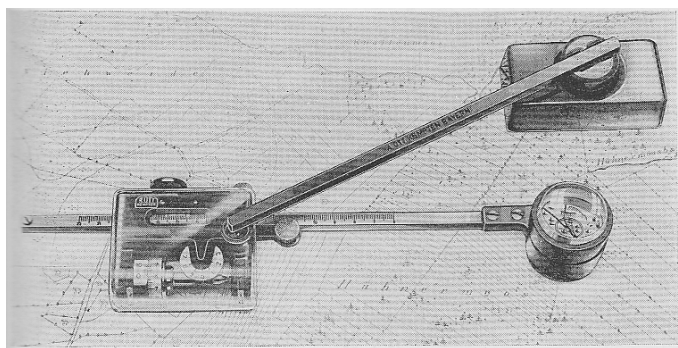


Abbildung 5: Grundaufbau Polarplanimeter

einen Fahrstift, mit dem man die Fläche umfährt (dieser kann auch als Koordinatenkreuz oder Lupe ausgeführt sein) und am anderen, polarmseitigen Ende das Messwerk mit der Messrolle, siehe Abb. 5.¹⁸ Die Achse der Messrolle ist parallel zum Fahrarm. Bewegt sich der Fahrstift, so kann man sich jede Bewegung in zwei Komponenten zerlegt denken, eine Radial- und eine Tangentialkomponente, wie dies auch in Abb. 6 auf der nächsten Seite¹⁹ deutlich wird. Bei Drehungen um A wird die Messrolle direkt bewegt. Umfährt man die Fläche jedoch vollständig, heben sich die Drehungen, die ja in beide Richtungen erfolgen, gerade auf. Anders verhält sich dies bei den tangentialen Komponenten $r d\varphi$, da die Messrolle hier in Abhängigkeit des Winkels φ teils dreht und teils gleitet, ohne sich zu drehen. Bei einer reinen „Drehung um $d\varphi$ “ bleibt das Dreieck OFA

¹⁸Aus: Schröder: Mathematik, S. 375.

¹⁹Aus: Meyer zur Capellen: Instrumente, S. 185.

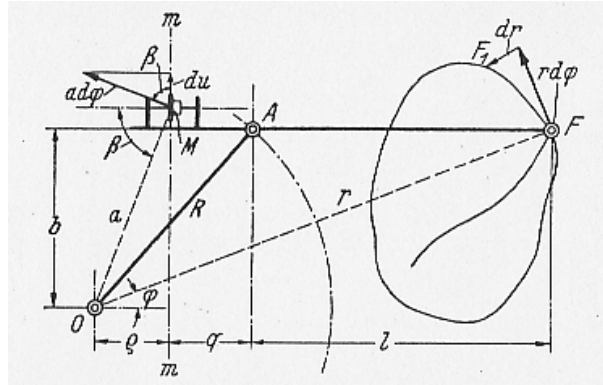


Abbildung 6: Kinematik des Polarplanimeters

starr“²⁰, somit dreht sich auch a um $d\varphi$ und die Messrolle verschiebt sich folglich um $a d\varphi$. Es gilt $\cos \beta = \frac{du}{a d\varphi}$ sowie $\cos \beta = \frac{\varrho}{a}$ und damit $du = \varrho d\varphi$. Aus Abb. 7²¹

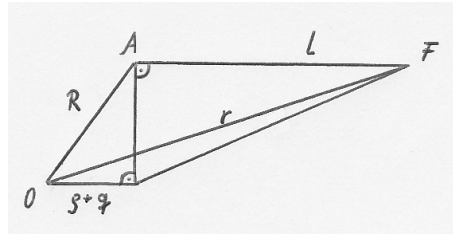


Abbildung 7: Hilfsbetrachtung zu Abb. 6

erkennt man den Zusammenhang $r^2 = R^2 + l^2 - 2 R l \cos \varepsilon$, wobei $\varepsilon = \angle OAF$ ist. Damit gilt $\frac{\varrho + q}{R} = \sin(\varepsilon - 90^\circ) = -\cos \varepsilon$, womit sich ergibt $r^2 = R^2 + l^2 + 2 l (\varrho + q)$. Man definiert nun $g^2 := R^2 + l^2 + 2 l q$, wobei g der Radius des Grundkreis genannt wird. Der Grundkreis entsteht für eine Umdrehung des Planimeters mit $\varrho = 0$. Daraus ergibt sich schließlich $\varrho = \frac{1}{2l}(r^2 - g^2)$. Damit gilt $du = \frac{1}{l}(\frac{1}{2}r^2 d\varphi - \frac{1}{2}g^2 d\varphi)$ bzw. $\frac{1}{2}r^2 d\varphi = l du + \frac{1}{2}g^2 d\varphi$. Für die umfahrene Fläche A in Polarkoordinaten gilt allgemein $A = \oint \frac{1}{2}r^2 d\varphi$ und damit $A = l u + \frac{1}{2}g^2(\varphi_2 - \varphi_1)$. φ_1 und φ_2 sind dabei der Anfangs- bzw. Endpolarwinkel. Ist d der Durchmesser der Messrolle, die sich n mal dreht, so gilt $u = \pi d n$. Weiter führt man die Konstante k ein mit $k = \pi d l$. Damit ergibt sich $l u = n k$.

²⁰Ebd.

²¹Erstellt durch den Verfasser.

- Liegt der Pol außerhalb der zu umfahrenden Fläche, so sind Anfangs- und Endpolarwinkel gleich und es gilt $A = n k$. D.h. der Flächeninhalt kann auf Grund der n Umdrehungen der Messrolle abgelesen werden; die Konstante k liegt dem Planimeter in der Regel bei.
- Liegt der Pol innerhalb der auszumessenden Fläche, so muss der Polarm in jedem Falle eine volle Drehung ausführen, wenn die Fläche umfahren wird. Anfangs- und Endwinkel unterscheiden sich damit um 2π und es gilt $A = n k + \pi g^2$. πg^2 als Fläche des Grundkreises ist wieder eine Konstante des Planimeters, so dass der zu ermittelnde Flächeninhalt wieder auf die n Umdrehungen der Messrolle zurückgeführt werden kann.

Aus technischen Gründen ist nun die Achse der Messrolle nicht direkt auf dem Fahrarm angebracht, sondern in der Regel daneben, d.h. der Auflagepunkt der Messrolle befindet sich winkelfersetzt zum Fahrarm. An dieser Stelle ist es für das grundlegende Verständnis der Funktionsweise des Planimeters nicht mehr erforderlich, diesen Zusammenhang quantitativ zu untersuchen, es sei lediglich darauf hingewiesen, dass Willers²² diese Untersuchung in seine allgemeine Planimetertheorie mit aufgenommen hat und zu dem Ergebnis kommt, dass dieser Winkelversatz keinerlei Bedeutung hat.

3.3 Die Benutzung des Planimeters

An dieser Stelle seien dem Leser und potentiellen Anwender noch einige Hinweise im Umgang mit dem Polarplanimeter mit auf den Weg gegeben. So einfach dieses Gerät auch aussieht, so ist seine Benutzung dennoch nicht trivial. Einzig der Zusammenbau ist völlig selbsterklärend und damit unproblematisch. Mit dem Fahrstift wird die Fläche dann umfahren; in der Regel ist es so, dass das

²²Vgl.: Willers: Math. Maschinen, S. 131.

Messwerk positiv zählt, wenn man die Fläche im Uhrzeigersinn, also in mathematisch negativer Drehrichtung umfährt. Vor und nach der Messung wird an der Messrolle, siehe Abb. 8²³ mittels des Nonius der angezeigte Wert abgele-

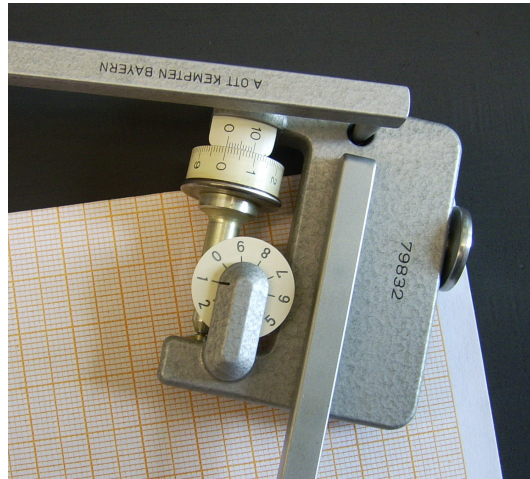


Abbildung 8: Messwerk am Planimeter

sen; durch Differenzbildung erhält man den Betrag, um den sich die Messrolle gedreht hat. Zu beachten ist dabei, dass die Messrolle in 100 Teile aufgeteilt ist; jeder Teil entspricht 10 Noniuseinheiten (NE). Das waagerecht angebrachte Zählrad zählt die vollen Umdrehungen des Messrades. Um aus der Anzeige den Flächeninhalt zu bestimmen muss man wissen, welcher Fläche 1 NE entspricht. Dazu liegt jedem Planimeter eine Umrechnungstabelle bei, siehe Abb. 9²⁴

Planimeter Nr. 11/79832	Verhältnisse	Wert der Noniuseinheit	Konstante	Größe der Kontrollfläche: 10010 mm ² Pl Td 4 1178
	1 : 1	10 mm ²	20328	
	1 : 1000	10 m ²	
	1 : 500	2,5 "	
	1 : 1500	22,5 "	
	1 : 2000	40 "	

Abbildung 9: Umrechnungstabelle

Als Beispiel wurde die Funktion $y = e^{-x^2}$ im Intervall $[-2; 2]$ umfahren. Diese

²³Erstellt durch den Verfasser.

²⁴Erstellt durch den Verfasser.

Funktion ist ein gutes Beispiel einer nicht ohne Weiteres geschlossen integrierbaren Funktion. Indem man das Integral aber erweitert auf ein Flächenintegral über die gesamte xy-Ebene und eine Koordinatentransformation in Polarkoordinaten vornimmt, gelangt man schließlich zu der Lösung $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Bei der Umfahrung mit dem Planimeter im angegebenen Intervall zeigte die Messrolle eine Differenz von 27,7 Einheiten; dies entspricht 277 NE. Laut Abb. 9 auf der vorherigen Seite war die Fläche damit 27,7 cm² groß. Die Funktion lag im Maßstab 1:0,25 vor, d.h. vierfach vergrößert. Eine Längeneinheit (LE) entsprach damit 4 cm und eine Flächeneinheit (FE) demzufolge 16 cm². Die umfahrene Fläche war damit umgerechnet 1,73125 FE groß. Wie man nachrechnet ist $\sqrt{\pi} \approx 1,77$. Es muss beachtet werden, dass die Funktion nur in einem Intervall umfahren wurde. Doch selbst unter der Annahme, man wollte die gesamte Fläche unter dem Graphen bestimmen, so weicht der ermittelte Wert noch nicht einmal um 3% vom errechneten Wert ab; mit dieser Genauigkeit kann eine näherungsweise graphische Integration nur schwerlich durchgeführt werden.

Fazit

Um die Funktionsweise des Polarplanimeters zu verstehen sind sichere Kenntnisse der Integralrechnung von Nöten, zumindest wenn man sich das Ziel setzt, die Funktionsweise quantitativ zu untersuchen. Qualitative Aussagen über das Verhalten der Messrolle bei verschiedenen Bewegungen des Fahrarms sind durchaus möglich. Zur Unterstützung wäre es denkbar vom einfacheren Fall des Linearplanimeters auszugehen; dessen Funktionsweise kann rechnerisch etwas einfacher überprüft werden, u.a. deshalb, weil mit kartesischen Koordinaten gerechnet werden kann. Die Theorie des Polarplanimeters könnte dann in Analogie zum Linearplanimeter qualitativ entwickelt werden, dies würde dem Anspruch zumindest auf gewisse Vorstellungen von seiner Funktionsweise am Nächsten kommen. Dennoch erscheint das Polarplanimeter wenig geeignet, den

Schülern positive Anreize zur Verbesserung ihres Verständnisses der Integralrechnung zu geben.

4 Der Integrgraph

„Integrgraphen zeichnen die Integralkurve zu einer Funktion auf.“²⁵ Mit dieser knappen Beschreibung ist das Gerät 'Integrgraph' bereits zu großen Teilen charakterisiert. Ergänzt man noch, dass die Integralkurve gezeichnet wird, indem man die gegebene Funktion mit einem Fahrstift nachzeichnet, so ist die Funktion des Geräts im Wesentlichen beschrieben. Vergleicht man das Resultat mit den Erkenntnissen des vorigen Abschnitts, so kann man verallgemeinern:

- Mit Planimetern kann das bestimmte Integral einer Funktion in einem vorgegebenen Intervall bestimmt werden. Das Ergebnis ist folglich eine Zahl.
- Mit Integrgraphen wird das unbestimmte Integral einer Funktion in einem vorgegebenen Intervall bestimmt. Als Ergebnis erhält man eine Kurve.

Damit befindet sich der Integrgraph weit näher an der schulischen Realität des Analysisunterrichts als das Planimeter, denn in der Schule ist noch immer der funktionale Charakter des Integrals bestimmender Unterrichtsinhalt. Zu einer Funktion, die als Gleichung vorgegeben ist, ist das unbestimmte Integral gesucht, und zwar wieder in Form einer Funktionsgleichung. Letztere ist jedoch hauptsächlich Mittel zum Zweck, denn durch Auswertung der Stammfunktion in bestimmten Punkten gelangt man zum eigentlichen Ziel, der Bestimmung einer Fläche. Auch mit dem Integrgraphen kann dies geleistet werden, jedoch mit der Einschränkung, dass dazu zunächst ein Graph der gegebenen Funktion gezeichnet vorliegen muss und die Funktionsgleichung der Stammfunktion unbekannt bleibt. Damit lässt sich die Leistungsfähigkeit des Integrgraphen wie folgt beschreiben:

²⁵Meyers neues Lexikon. Band 6. 2. neu erarb. Auflage. Leipzig 1973, S. 590.

- Ist eine Funktion gegeben, die nicht geschlossen integrierbar ist, oder ist die Funktionsgleichung unbekannt, so kann mit dem Integrappen dennoch eine Stammfunktion gefunden werden.
- Ist eine Vielzahl von Flächen zu bestimmen, z.B. die Fläche unter einem Graphen für verschiedene Intervalle, so wird man sich ebenfalls dazu entschließen, diese Flächen nicht einzeln auszumessen, sondern mittels der Stammfunktion zu berechnen. Auch in diesem Falle kann der Integrapp zur Anwendung kommen.

Ebenso lassen sich auch die Grenzen dieses Geräts skizzieren:

- Die Stammfunktion liegt nur graphisch vor. Ist eine graphische Weiterverarbeitung nicht möglich oder nicht gewünscht, so muss im Anschluss (evtl. näherungsweise) eine Funktionsgleichung der Stammfunktion ermittelt werden.
- Hat man eine gegebene Kurvenschar, so können immer nur einzelne Vertreter dieser Schar integriert werden.

Im vorigen Abschnitt stellte sich heraus, dass die Funktionsweise des Planimeters nicht ohne Weiteres zu verstehen ist, ein Einsatz im Unterricht also vermieden werden sollte. Ein Einsatz des Integrappen im Unterricht wiederum wäre wünschenswert, denn bei ihm kann der Integrationsprozess graphisch beobachtet werden. Insgesamt leistet der Integrapp damit mehr als das Planimeter. Damit stellt sich jedoch die berechtigte Frage, ob die Funktionsweise dieses Geräts von Schülern verstanden werden kann, wenn dies schon beim Planimeter nur unter Mühe möglich war. Der Beantwortung dieser Frage widmen sich die folgenden Abschnitte.

4.1 Ein geschichtlicher Abriss

Die Geschichte der Integrappen reicht ähnlich weit zurück wie jene der Planimeter. Bereits 1836 ist das Prinzip eines Integrappen von Coriolis zumindest beschrieben worden²⁶, allerdings war seine erdachte Konstruktion in der Praxis wohl kaum nutzbar.²⁷ Allgemein wird in der Literatur Abdank-Abakanowicz als derjenige genannt, dessen Konstruktionen sich in der Praxis auch tatsächlich durchsetzen konnten. Ab 1878 begann er Integrappen zu konstruieren.²⁸ Als Erbauer des ersten wirklich funktionstüchtigen Integrappen wird Zmurko genannt, der ab 1861²⁹ einen mit einer Integrierrolle³⁰ ausgestatteten Apparat baute. Auch Boys wird noch genannt, allerdings schwanken hier die Zeitangaben. Während Willers von einer älteren Konstruktion spricht, berichtet Galle, die Entwicklungen von Abdank-Abakanowicz und Boys seien etwa zeitgleich entstanden. Allerdings behauptet Galle 1912 auch, Abdank-Abakanowicz habe die Überarbeitung bzw. konstruktive Verbesserung seiner Instrumente durch Coradi nicht mehr erlebt.³¹ Dies ist höchst erstaunlich, denn er selbst berichtet 1889 von „Corradis Integrapp. System Abdank-Abakanowicz.“³² Interessant ist ein Blick auf die ursprüngliche Konstruktion von Abdank-Abakanowicz, siehe Abb. 10 auf der nächsten Seite³³ Zweierlei fällt auf: zum Einen scheint es sich nur um ein Prinzipmodell zu handeln, denn es findet sich keinerlei Hinweis darauf, wie das Schneidenrad gesteuert wird. Zum Anderen fällt auf, dass die Zeichenebene beweglich ausgeführt ist, während das Schneidenrad sich nur drehen kann, also das gleiche Prinzip, wie es später die Firma Ott bei ihren Integrappen

²⁶Vgl.: Galle: Instrumente, S. 157.

²⁷Vgl.: Willers: Math. Maschinen, S. 236.

²⁸Vgl.: Abdank-Abakanowicz: Integrappen, S. 23.

²⁹Vgl.: Galle, Ebd.

³⁰Vgl.: Willers, Ebd.

³¹Vgl.: Galle, S. 157.

³²Abdank-Abakanowicz: Integrappen, S. 59; vgl. auch S. 57.

³³Aus: Abdank-Abakanowicz: Integrappen, S. 12.

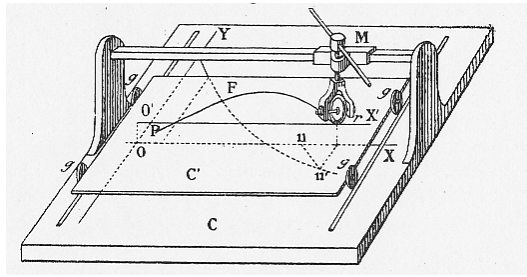


Abbildung 10: Entwurf von Abdank-Abakanowicz

verwendete. Bei der Überarbeitung der Integraphen von Abdank durch Coradi entstand allerdings im Ergebnis ein Integraph, bei dem die Zeichenebene fest stand und das Schneidenrad frei beweglich war. Es kann nur vermutet werden, was der Grund war die Konstruktion zu wechseln; vermutlich waren die mechanischen Verluste zu groß, so dass die bewegliche Zeichenebene nicht zuverlässig auf Richtungsänderungen des Schneidenrades reagierte. Denn der Preis für diese Umstellung in der Konstruktion war hoch: die Integraphen nach Abdank-Coradi waren extrem unhandlich und wuchtig. Nicht umsonst sprach Alwin Walther 1931 in einem Brief an Ludwig Ott vom „Coradische[n] Monstrum“³⁴. Glücklicherweise konnte der Autor der angegebenen Quelle den Briefwechsel von Ludwig Ott teilweise sichten, so dass hier auch wesentliche Entwicklungsschritte des Integraphen von Ott wiedergegeben werden können. Im Februar 1931 wurde durch Heinz Adler ein Versuchmodell bei Ott eingereicht. Dieses bewährte sich offenbar so gut, dass bereits ein Jahr später ein Modell zur Physikalischen Ausstellung nach Paris geschickt wurde. Wenig erstaunlich bei dieser kurzen Entwicklungsphase ist die Tatsache, dass sich Mängel in der Konstruktion heraus stellten wie etwa eine ungenügende Stabilität.³⁵ Schließlich dauerte es noch bis 1937, bis das Gerät fertig durchkonstruiert war und von der Firma Ott offiziell angeboten wurde. Bis Mitte der 1970er Jahre wurde der Integraph dann

³⁴Hashagen, U.; Hellige, H. D. (Hrsg.): *Rechnende Maschinen im Wandel: Mathematik, Technik, Gesellschaft. Festschrift für Hartmut Petzold zum 65. Geburtstag.* o.O. 2011, S. 93f.

³⁵Ebd., S. 101.

beinah unverändert gebaut.

4.2 Der mathematische Hintergrund der Funktionsweise

Die wesentlichen Kerngedanken der Ermittlung möglicher Stammfunktionen wurden bereits in Absatz 2.1 auf Seite 8 dargelegt. An dieser Stelle sollen diese Überlegungen lediglich etwas allgemeiner formuliert und ihre Bedeutung für die Konstruktion eines entsprechenden Integraphen betrachtet werden.

Man betrachte die folgende Abb. 11³⁶ Von zentraler Bedeutung ist, dass man

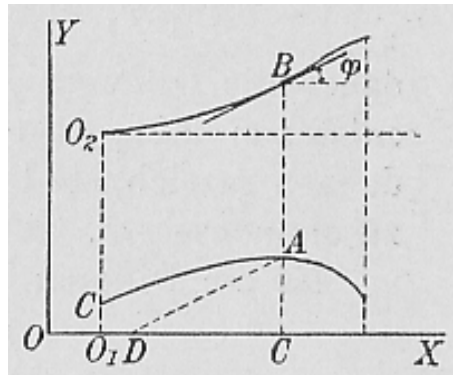


Abbildung 11: Konstruktion einer Stammfunktion

sich eine Möglichkeit überlegt eine Gerade zu zeichnen, deren Anstieg gerade gleich dem Funktionswert der gegebenen Funktion in jedem Punkte ist. Grundlage dafür ist, dass man sich eine Bezugsstrecke als Längeneinheit wählt. Dies kann durchaus eine Strecke von beliebiger Länge sein; diese Länge wird einfach als Längeneinheit definiert, in Abb. 11 ist dies die Strecke \overline{DC} ; sie muss natürlich im Weiteren in Form der Gerätekonstante verarbeitet werden, damit man von der geräteeigenen Längeneinheit auf die üblichen Einheiten umrechnen kann. Für jeden Punkt A der gegebenen Funktion kann nun ein Dreieck DCA konstruiert werden, in dem $|\overline{DC}| = DC = 1$ gilt. Sei φ der Winkel, den

³⁶Aus: Galle: Instrumente. S. 155.

die Strecke \overline{DA} dann mit der x-Achse einschließt, so gilt: $\tan \varphi = \frac{AC}{DC} = \frac{AC}{1} = y$. Für die Steigung der Stammfunktion an der zu Punkt A gehörigen Stelle gilt ebenfalls definitionsgemäß $F'(x) = y$ und damit $F'(x) = \tan \varphi$. Mit Hilfe der Einheitsstrecke \overline{DC} kann man nun für jeden Punkt A eine Strecke \overline{DA} konstruieren, die den gleichen Anstieg wie eine Tangente an die Stammfunktion an der entsprechenden Stelle hat. Die Wahl der Länge DC ist dabei beliebig; in der Endlichkeit dieser Strecke liegt allerdings die Begründung, warum jeder Integrator nur eine bestimmte maximale Umfahrungshöhe der Funktion y gestattet. Würden die Funktionswerte beliebig große Werte annehmen können, so hätte die gezeichnete Stammfunktion letztlich eine enorme Steigung, die Arbeit damit wäre ganz einfach unpraktisch. Deshalb wählt man besser den Weg den Maßstab zu ändern; zu diesem Zwecke gibt es an jedem Integrator eine Verstellmöglichkeit, die letztlich darauf führt, die tatsächliche Länge der Einheitsstrecke \overline{DC} zu verändern.

4.3 Technische Realisierung des Arbeitsverfahrens

Nachdem nun geklärt ist, dass es sehr einfach möglich ist, geometrisch aus der Ordinatenhöhe eine Strecke zu konstruieren, die den zahlenmäßig gleichen Anstieg hat, stellt sich jetzt die Frage, wie es technisch realisiert wurde, dass sich der Zeichenstift auch in diese Richtung bewegt und damit die Stammfunktion zeichnet.

4.3.1 Die Bauform nach Abdank-Coradi

Die folgende Abb. 12 auf der nächsten Seite³⁷ zeigt den Integrator nach Abdank-Abakanowicz, konstruiert durch Coradi, in seiner ursprünglichen Bauform sche-

³⁷Aus: Willers: Math. Maschinen, S. 237.

W_2 , der Integralwagen W_3 , das Richtungslineal RL und das Schneidenrad mit seiner Achse \overline{CD} . Wird die zu integrierende Kurve y mit dem Fahrstift befahren, so richtet sich RL entsprechend aus; RL kann dabei auf einem Zapfen Z_2 gleiten, so dass der eingezeichnete Abstand b immer konstant bleibt. Es gilt $\tan \varphi = \frac{y}{b}$. Identifiziert man b mit der Einheitsstrecke, so entspricht der Anstieg von RL gerade dem Wert $f(x)$. RL gleitet außerdem noch in der Führung W_4 ; diese bewirkt, dass die Strecke \overline{AB} ständig senkrecht zu RL verläuft. Durch das Gelenkparallelogramm ABCD ist garantiert, dass die Bedingung $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ eingehalten wird. \overline{CD} ist aber gerade die Achse des Schneidenrades. Damit ist sicher gestellt, dass die Rollrichtung des Schneidenrades mit der Richtung von RL übereinstimmt. Durch einen entsprechenden Auflagedruck wird erreicht, dass das Schneidenrad tatsächlich auch nur in seiner Rollrichtung abrollen kann, ohne seitlich zu gleiten. Wird beim Befahren der Kurve y nun der gesamte Rahmen W_1 bewegt, so bewirkt das Schneidenrad, dass sich der mit ihm verbundene

Integrierwagen W_3 bewegt; an ihm ist der Zeichenstift befestigt. Damit bewegt sich der Zeichenstift ständig in die gleiche Richtung wie das Schneidenrad, die Integralkurve wird gezeichnet, während die Zeichenunterlage fest steht.

4.3.2 Die Bauform der Firma Ott

Der Integrgraph der Firma Ott in seiner endgültigen Bauform weist zahlreiche konstruktive Verbesserungen auf. Die Anzahl der mechanischen Übertragungselemente wurde reduziert, so dass nicht nur die Bedienung weniger Kraft erfordert und das gesamte Gerät leichter ist, sondern auch eine ganze Anzahl von Fehlermöglichkeiten vermieden wurde, wenn man nur bedenkt, dass jede mechanische Führung auch Verschleiß aufweisen kann. Dies würde aber bedeuten, dass gewisse Forderungen hinsichtlich der Parallelität von Bauelementen nicht mehr erfüllt werden könnten. Die Verringerung der Bauteile war damit ein entscheidender Schritt, die Arbeitsgenauigkeit des Geräts über lange Zeiten aufrecht zu erhalten.³⁸ Durch die weniger massive Bauweise war es auch möglich, den Apparat zerlegbar zu gestalten. Abb. 13 auf der nächsten Seite³⁹ zeigt den Integrgraphen in schematischer Darstellung. Seine wesentlichen Elemente sind der Ordinatenwagen W_1 , der Abszissenwagen W_2 und der Integrierwagen W_3 . Wird die gegebene Kurve mit dem Fahrstift F nachgezeichnet, so überträgt sich die Ordinatenhöhe von y auf W_1 . Das Schneidenrad J kann sich um eine feste Achse z drehen. Der Rahmen s , in dem das Schneidenrädchen J geführt wird, kann durch einen Zapfen S durch W_1 gedreht werden, und zwar um z . Anson-

³⁸In Vietoris, L.: Zur Theorie der Integrgraphen. In: Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 52 (1942), S. 71-74, hat Vietoris die mit Integrgraphen erreichbare Genauigkeit näher untersucht. Ohne an dieser Stelle darauf einzugehen sei erwähnt, dass selbst beim mehrmaligen Befahren der zu integrierenden Kurve y mit der damit verbundenen zufälligen Abweichung des Fahrstiftes von y kein Unterschied bei der Kurve der Stammfunktion wahrzunehmen ist. Man kann also zunächst feststellen, dass die Ungenauigkeit des Apparates so klein ist, dass sie auf Grund der sowieso begrenzten Ablesegenauigkeit für schulische Zwecke praktisch vernachlässigt werden kann.

³⁹Aus: Meyer zur Capellen: Instrumente, S. 238.

4.4 Die Benutzung des Integraphen der Firma Ott

In Abb. 14⁴¹ ist der aufgebaute Integraph zu sehen. Folgende Hinweise müssen bei seiner Benutzung berücksichtigt werden:

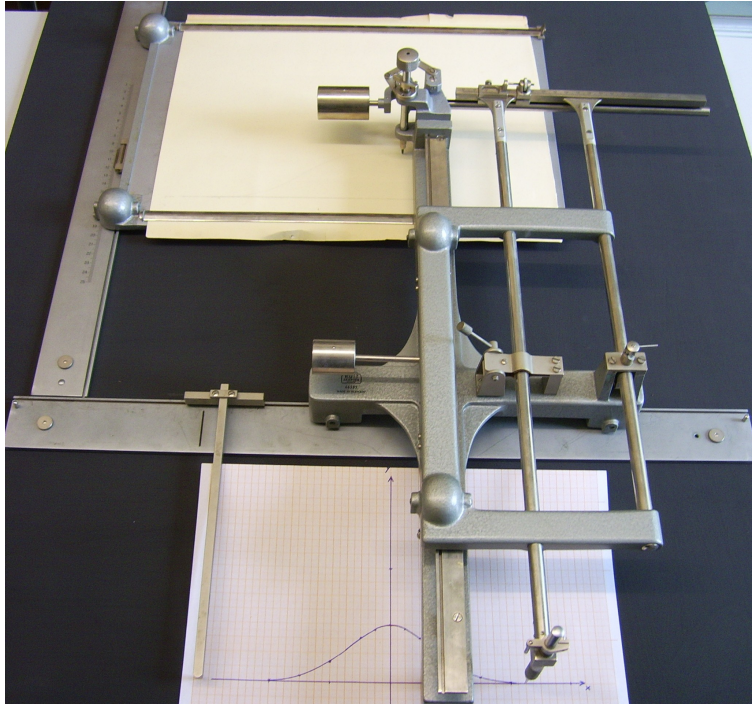


Abbildung 14: Aufgebauter Integraph der Firma Ott

- Die Führungsliniale sind exakt rechtwinklig auszurichten. Zu diesem Zweck trägt W_3 an zwei Seiten je zwei Stahlkuppen, die zur Anlage an den Lin-ealen gebracht werden. Danach können diese auf der Unterlage fixiert wer-den.
- Dem Integraph liegen zwei Einstell-Lehren bei; eine ist in Abb. 14 links neben der vorgegebenen Kurve y zu sehen. Diese Lehren werden am waage-rechten Führungslinéal angebracht. Die x-Achse der Zeichenvorlage ist dann so zu positionieren, dass die Spitzen der Lehren genau auf die x-Achse

⁴¹Vom Verfasser erstellt.

zeigen. Damit ist gewährleistet, dass das Schneidenrad auch tatsächlich in x-Richtung abrollt, wenn der Fahrstift die x-Achse nachzeichnet.

- Die beiden Transportsicherungen in Form von Hebelchen auf W_2 sind zu lösen. (Bei arretierten Hebeln rastet der Integraph in der Nulllage ein. Auf diese Weise kann auf W_3 sehr schnell eine x-Achse gezeichnet werden.)
- Der Lenkarm, siehe Abb. 15⁴², wird auf die erforderliche Konstante, siehe Abb. 16⁴³, eingestellt. Eine Tabelle befindet sich im Deckel der Transportkiste.

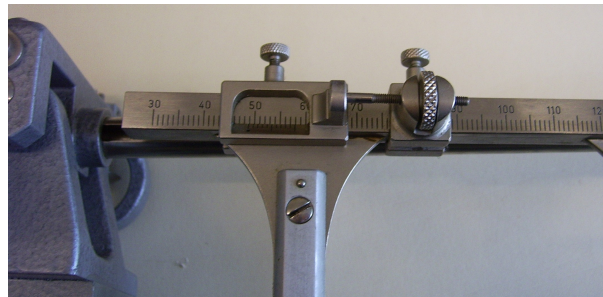


Abbildung 15: Lenkarmeinstellung

<i>Integraph Nr. 46287</i>						
Flächenwert der Noniuseinheit am Ordinalen- lineal	Einstellung am Lenkarm beim Arbeiten		Umfahrungsbereich		Umfahrungsfläche des Kontrolllineals 70.000 mm ²	
	mit Bleistift oder Reißfeder	ohne Bleistift oder Reißfeder	Länge in mm	Höhe in mm		
5 mm ²	48,9	49,0	330	± 65		
10 "	98,7	98,8	330	± 105		
15 "	148,3	148,5	330	± 105		
20 "	198,0	198,2	330	± 105		

Abbildung 16: Tabelle mit Einstellwerten für Lenkarm

- Auf dem senkrechten Führunglineal befindet sich eine Teilung, die mit einem Nonius an W_3 abgelesen werden kann. Aus der Differenz aus End-

⁴²Vom Verfasser erstellt.

⁴³Vom Verfasser erstellt.

und Anfangsablesung lässt sich die Fläche unterhalb des durchfahrenen Kurvenstücks ermitteln.⁴⁴

Als Beispiel wurde wieder die Kurve $y = e^{-x^2}$ im Intervall $[-2; 2]$ befahren, die Lenkarmeinstellung betrug 48,9. Als Differenz an der Ablesung am Führungslinial ergab sich nach Durchfahren der Kurve ein Wert von 5,61cm, das entspricht 561 NE. Entsprechend Abb. 16 auf der vorherigen Seite sind das 28,05 cm². Da die Kurve im Maßstab 1:0,25 vorlag, wird dieser Wert noch mit 0,25² multipliziert. Die Fläche unter dem Graphen entspricht damit etwa 1,75 Flächeneinheiten.

Fazit

Trotz des sehr komplexen Aufbaus ist die Funktionsweise von (Grund-)Integralen recht einfach zu verstehen. Einzig zur Begründung, warum das Gerät in dieser Weise funktioniert, d.h. warum eine Ordinatenhöhe in einen Anstieg umgewandelt wird, benötigt man Kenntnisse aus der Integralrechnung. Um erklären zu können, wie dies letztlich umgesetzt wird, genügen trigonometrische Betrachtungen, über die die Schüler spätestens in Klasse 10 verfügen. Aus fachlicher Sicht spricht damit nichts gegen einen Einsatz des Integrals im Analysisunterricht der Oberstufe.

⁴⁴Vgl.: Ott, A.: Gebrauchsanweisung für den Integrator „Adler-OTT“. Kempten o.J., S. 4.

5 Die schulische Nutzung des Integrativen im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe

Nachdem in den vorangegangenen Abschnitten untersucht worden ist, ob der Integrative von den Schülern überhaupt verstanden werden kann, und auch dargelegt wurde, dass Verfahren der graphischen Integration von Hand keine Alternative zum mechanischen Integrieren darstellen können, soll der Fokus in diesem Abschnitt darauf gerichtet sein, an welchen Stellen des schulischen Mathematikunterrichts ein Integrative zum Einsatz kommen und wie dies gestaltet werden könnte. Dies soll zudem verbunden werden mit einem Blick auf bekannte Probleme der Schüler mit der Integralrechnung.

5.1 Anknüpfungspunkte in den Rahmenrichtlinien für Gymnasien in Sachsen-Anhalt

Zunächst einmal kann festgestellt werden, dass der Einsatz eines historischen Gerätes wie des Integrativen mit den in den Rahmenrichtlinien (RRL) veröffentlichten Grundsätzen vereinbar ist. Zwar werden allgemein historische Geräte und ihr Einsatz im Unterricht in den RRL nicht thematisiert, ganz im Gegensatz bspw. zu Geometriesoftware, doch in den Grundsätzen zur Unterrichtsgestaltung⁴⁵ sind Handlungsorientierung und Selbsttätigkeit zentrale Begriffe. Stellt man das Gerät also nicht nur kurz vor, sondern gibt den Schülern tatsächlich die Möglichkeit sich selbst mit ihm auseinander zu setzen, es auszuprobieren, damit zu arbeiten und anschließend über ihre Erfahrungen zu berich-

⁴⁵Vgl.: Kultusministerium Sachsen-Anhalt: Rahmenrichtlinien Gymnasium Mathematik. Schuljahrgänge 5-12. o.O. 2003, S. 17f.

ten, so kann man einen wertvollen Beitrag zur Verwirklichung dieser Grundsätze im Mathematikunterricht leisten.

Im Themengebiet Analysis, Thema 3: Integralrechnung⁴⁶ finden sich einige mögliche Anknüpfungspunkte für den Einsatz eines Integraphen.

- Die Eigenschaften des bestimmten Integrals sollen in der Einführungsphase dieses Themas behandelt werden. In den sog. Hinweisen zum Unterricht (HzU) findet sich der Vermerk, das Integral auch unter dem Aspekt einer aus Änderungen rekonstruierten Funktion zu betrachten. Bekannt ist, dass eine beliebige Funktion das Änderungsverhalten ihrer Stammfunktion widerspiegelt; die Funktionswerte werden in Form der Steigung der zugehörigen Stammfunktion verarbeitet. Dies ist gerade die Arbeitsweise des Integraphen. Mit ihm kann die Rekonstruktion also visualisiert werden.
- Das Integral soll besonders unter funktionalem Aspekt als Integralfunktion betrachtet werden. In den HzU wird der Zusammenhang zur Flächeninhaltsfunktion erwähnt. Mit dem im Abschnitt 4.4 dieser Arbeit beschriebenen Aufbau des Geräts eignet sich der Integraph gerade als Zeichner der Flächeninhaltsfunktion. Warum dies so ist und ob dies zwangsläufig immer so sein muss kann im Versuch direkt bestimmt werden.
- Schließlich wird noch erwähnt, dass im Rahmen einer möglichen Vertiefung auf die Geschichte der Infinitesimalrechnung eingegangen werden kann. Hier kann man das Gerät also im historischen Kontext einbetten und auch die Ziele und Notwendigkeiten darlegen, die zur Entwicklung der Integraphen beigetragen haben.

⁴⁶Vgl. ebd., S. 86f.

5.2 Probleme der Schüler mit der Integralrechnung

5.2.1 Ein Blick in die Literatur

Danckwerts⁴⁷ warnt davor, die Integralrechnung nur mit dem Ziel zu betreiben die Fläche unter oder zwischen Graphen zu bestimmen. Er verweist darauf, dass die Berechnung eines Integrals letztlich darauf hinaus läuft, einen orientierten Flächeninhalt zu betrachten. Man bekommt eine Vorstellung davon, was dies bedeutet, wenn man einmal mit dem Planimeter gearbeitet hat: dazu muss man nur die Drehrichtung des Messrädchens beobachten. Weiter weist er darauf hin, dass „das *inhaltliche Verständnis des Integralbegriffs* im Mittelpunkt“ stehen muss.⁴⁸ Damit kennzeichnet er nicht den souveränen Umgang mit Integrationsproblemen als zentralen Unterrichtsgegenstand, sondern das Verständnis des Prinzips der Integration. Dies deckt sich zu großen Teilen mit dem Ziel, durch verstärkte graphische Integration den Zusammenhang einer Funktion mit ihrer Stammfunktion zu verinnerlichen, statt den Analysisunterricht auf das Einsetzen von Zahlen in Grundintegrale zu beschränken. Natürlich ist das sichere Beherrschen von Rechenfertigkeiten Grundvoraussetzung für das erfolgreiche Bearbeiten der schulischen Aufgabenstellungen, dennoch hilft ein ausgeprägtes Grundverständnis für die mathematischen Wurzeln der Integralrechnung, das Anliegen bestimmter Aufgabenstellungen erst einmal besser zu verstehen und nicht blind ein Integral zu lösen. Interessant ist übrigens in diesem Zusammenhang, dass auch die klassische Herangehensweise bei der Einführung des Integrals, nämlich die Erarbeitung über das Riemannsche Integral mit der Bildung von Ober- und Untersummenfolgen, dafür verantwortlich gemacht wird, dass die Integralrechnung vielen Schülern von Beginn an Schwierigkeiten bereitet und

⁴⁷Vgl.: Danckwerts, R., Vogel, D.: Analysis verständlich unterrichten. Berlin Heidelberg 2006, S. 93.

⁴⁸Ebd., S. 125.

damit in letzter Konsequenz auch negativ besetzt ist.⁴⁹ In der Tat werden derartige Überlegungen meist nur beim Einstieg in die Integralrechnung und dann nie wieder angestellt, so dass sich schon an dieser Stelle für den Schüler die Frage der Notwendigkeit dieses Inhalts ergibt. Doch damit noch nicht genug: selbst bei dieser anfänglichen Betrachtung von Summen fehlt es doch erfahrungsgemäß immer noch an der nötigen mathematischen Exaktheit, um dieses Problem auf diesem Wege umfassend zu bearbeiten. Die Frage etwa, ob die Bildung einer Summenfolge, seien es nun Ober- oder Untersummen, wohldefiniert ist, bleibt in der Regel unbeantwortet. Eine saubere Definition des Riemann-Integrals erfolgt meist nicht, Übungsaufgaben zu diesem Thema werden kaum gestellt, so dass von einem Lerneffekt bei solcherlei Einstieg in die Integralrechnung kaum die Rede sein kann. Insgesamt scheint es sinnvoll zu sein, den Schwerpunkt zumindest etwas zu verlagern, weg von einer theoretisch überfrachteten Einführung des Integrals, hin zu grundsätzlichen Betrachtungen der Integralidee. Dem Verständnis der Schüler kann dies nur förderlich sein. Der Flächeninhaltsaspekt wird ja in jedem Falle in der unmittelbaren Folge dieses Vorgehens thematisiert, so dass man sich bei der Thematisierung des Riemann-Integrals durchaus auf einen historischen Rückblick beschränken könnte, anstatt dies als Motivation der Integralrechnung zu nutzen.

5.2.2 Lehrermeinungen

Während der Recherchen zur vorliegenden Arbeit erklärten sich freundlicherweise auch einige Lehrer dazu bereit, über die ihrer Erfahrung nach häufig auftretenden Probleme der Schüler bei der Behandlung der Integralrechnung zu berichten. Die Ergebnisse der Befragungen seien im Folgenden dargestellt.⁵⁰

⁴⁹Vgl.: Tietze, U.-P. u.a.: Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II. Braunschweig 1982, S. 143f.

⁵⁰Im Vorfeld der Befragungen wurde absolute Anonymität zugesichert, so dass an dieser Stelle darauf verzichtet wird diesen Lehrern namentlich zu danken. Der Verfasser ist sich sicher, dass

Einig sind sich die befragten Lehrer darin, dass das Abstraktionsvermögen der Schüler, die Fähigkeit und Bereitschaft mit abstrakten Größen zu rechnen, nur unzureichend ausgebildet ist. Die Gründe dafür werden nicht angegeben, allerdings wird darauf verwiesen, dass diese Problematik auch bei der Differentialrechnung zu beobachten ist. Unter Umständen muss man hier auch die Überlegung anstellen, dass dieses Problem hausgemacht ist. Übliche Praxis an den Schulen bei der Einführung in die Differentialrechnung ist es, Differenzen- und Differentialquotienten zu betrachten und daraus die Werte für Ableitungen durch Grenzübergang zu ermitteln. Ab einer recht frühen Phase wird auf dieses Vorgehen dann aber vollkommen verzichtet zugunsten der ausschließlichen Anwendung von Ableitungsregeln mit der Folge, dass die Fähigkeit, solche grundlegenden Überlegungen wie jene des Übergangs von einer Sekante zur Tangente anzustellen, wieder verloren geht. Ab diesem Zeitpunkt ergibt sich für die Schüler nicht mehr die Notwendigkeit formal-abstrakte Überlegungen anzustellen, da sie durch stures Anwenden der Ableitungsregeln auf die konkret vorgegebene Funktionsgleichung ebenfalls die unmittelbaren Anforderungen des Unterrichts erfüllen können.

In unmittelbarem Zusammenhang damit steht das ebenfalls geäußerte fehlende Grenzwertverständnis der Schüler. Ausführliche Grenzwertbetrachtungen werden üblicherweise nur am Anfang der Qualifikationsphase beim Einstieg in das Thema Analysis angestellt. Erst rund 6 Monate später befinden sich die Schüler in der Integralrechnung. Was zuvor am Beispiel der Differentialrechnung erläutert wurde trifft auf die Integralrechnung umso mehr zu: Grenzwertbetrachtungen spielen im alltäglichen Mathematikunterricht keine Rolle. Allenfalls beim Einstieg in die Integralrechnung erfolgt, wie bereits dargelegt, eine (meist nicht einmal) vollständige Betrachtung des Riemann-Integrals, danach nie wieder. An

sich die erwähnten Personen beim Lesen dieser Zeilen angesprochen fühlen würden und bringt auf diesem Wege nochmals seinen Dank für die Unterstützung zum Ausdruck.

welcher Stelle soll der Schüler dann aber ein Grenzwertverständnis entwickeln? Damit eng verbunden ist die ebenfalls geäußerte Feststellung, dass manche Schüler nur zögernd erkennen und verstehen, dass mit dem Integral eine Fläche berechnet werden kann. Der Flächeninhaltsaspekt beginnt ja erst mit dem Riemann-Integral eine Rolle zu spielen bzw. wird erst dann verständlich, wenn man diese Betrachtungen konsequent zu Ende denkt. Andernfalls muss es für die Schüler einfach eine Tatsache bleiben, dass man mit dem Integral eine Fläche berechnen kann; von Verstehen kann man dann wohl nicht sprechen.

Ebenfalls wurde geäußert, dass nicht wenige Schüler Schwierigkeiten damit haben zu erkennen, dass es sich bei der Stammfunktion wieder um eine Funktion handelt. Der Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Stammfunktion ist diesen Schülern häufig auch nicht klar, d.h. der Zusammenhang zwischen Funktionswert einer Funktion und Steigung der Stammfunktion. Hier muss man sagen, dass evtl. eine Überbetonung des Flächeninhaltsaspekts die Ursache für dieses Problem sein könnte. Mit dem Integral wird dann gar nicht mehr die Stammfunktion assoziiert - diese ist dann nur ein Zwischenschritt zum Endziel - sondern nur eine Maßzahl für einen Flächeninhalt. Mit Integral ist dann stillschweigend das bestimmte Integral gemeint.

Diese Vermutung wird letztlich auch dadurch gestützt, dass als Einstieg in die Integralrechnung am häufigsten die Flächenbestimmung unter Graphen genannt wurde. Damit ist der Begriff Integral vermutlich so untrennbar mit dem Flächenaspekt verbunden, dass der funktionale Charakter der Stammfunktion ausgeblendet wird. Begünstigt wird dies evtl. durch folgenden Umstand: Im Unterricht wird eine Funktion y vorgegeben, welche untersucht werden soll. Dies geschieht zunächst durch Anwendung der Differentialrechnung auf y , die sog. Kurvendiskussion. In diesem Schritt bewegt man sich ausschließlich in eine Richtung, nämlich von y ausgehend in Richtung der Ableitungen. Die Anwen-

dung der Differentialrechnung ist für die Schüler damit ein Erkennungsmerkmal für y als Funktion: Funktionen untersucht man. Ist nun eine Fläche zu bestimmen, bewegt man sich in die andere Richtung, nämlich von y ausgehend Richtung Integral. Man bildet zwar notgedrungen eine Stammfunktion, doch nur, um das Integral berechnen zu können. Auf die gefundene Stammfunktion wendet man Methoden der Differentialrechnung nicht mehr an; im Sinne der eben erläuterten Logik wird die Stammfunktion damit nicht als Funktion erkannt bzw. verstanden, denn: Funktionen untersucht man, die Stammfunktion wird aber nicht untersucht, damit tritt auch der funktionale Charakter der Stammfunktion in den Hintergrund. Als ein anderer Einstieg wurde die Umkehrung der Differentialrechnung genannt. Hier bleibt festzustellen, dass damit alle Versäumnisse in diesem Gebiet auch in die Integralrechnung übernommen werden, siehe das fehlende Grenzwertverständnis.

5.3 Zum Einsatz von Geräten im Mathematikunterricht

Natürlich sollte der Einsatz von Geräten nicht allein zum Selbstzweck unternommen werden und auch kein Pausenfüller sein; es muss sich vielmehr anbieten, das Gerät einzusetzen, um eine konkrete Fragestellung zu bearbeiten. Wird das Gerät dabei nicht einfach nur vorgestellt, sondern den Schülern die Möglichkeit gegeben, seine Funktionsweise selbst zu verstehen und zu beobachten, so kann man durchaus von einem Experiment sprechen, zumal auch eine Fragestellung dabei bearbeitet wird, z.B. 'Wie ist es möglich, dass der Integrator eine Stammfunktion zeichnet?'. Leuders⁵¹ hebt dabei die Entwicklung tragfähiger individueller Vorstellungen hervor. Zwar kann beim Verstehen der Funktionsweise des Integrators von individuellen Vorstellungen nur sehr begrenzt

⁵¹Vgl.: Leuders, T. u.a.: Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II. 5. Auflage. Berlin 2011, S. 70f.

die Rede sein, denn die Funktionsweise lässt sich objektiv eindeutig angeben, aber trotzdem können diese Vorstellungen dazu beitragen den Prozess des Integrierens zu verinnerlichen, indem sich die Schüler vor Augen führen, wie der Integrator in einer entsprechenden Situation reagieren würde. Dadurch kann durchaus erreicht werden, dass die Schüler intuitiv die Tangentenrichtung der Stammfunktion richtig skizzieren, während man im Allgemeinen erst kurz nachdenken muss, welche Steigung die Stammfunktion an einer bestimmten Stelle eigentlich hat. Fast beiläufig bekommt der Unterricht bei diesem Vorgehen eine stärkere handlungsorientierte Prägung, denn um die Funktion des Integrators verstehen zu können genügt es nicht, ihn zu betrachten, man muss ihn bedienen und sein Verhalten beobachten. Dabei ist es von Bedeutung, nicht wahllos Operationen mit dem Gerät durchzuführen, sondern ganz bestimmte Operationen, bei deren Durchführung man bspw. ein bestimmtes Ergebnis erwartet und nun beobachten kann, wie der Integrator dies realisiert. Überlässt man die konkrete Vorgehensweise des Probierens den Schülern, so kann man damit eine Form des selbstorganisierten Unterrichts erreichen.⁵² Dies ist nun nicht so zu verstehen, dass die Klasse ohne äußeren Einfluss mit dem Objekt konfrontiert wird; die Erarbeitung der Fragestellung erfolgt ja durchaus im Klassenverband und auch der organisatorische Rahmen wird erst im Unterricht geschaffen. Jedoch haben die Schüler die Möglichkeit mit dem Gerät selbst zu arbeiten und zu interagieren, auch eigene Vorstellungen zu prüfen und in der Folge zu entwickeln und damit Erkenntnisse zu sammeln. Erst bei der Auswertung des Experiments erfolgt wieder eine Lenkung durch den Lehrer, indem die Erkenntnisse vorgestellt, diskutiert und so strukturiert werden, dass man wieder an den Lehrinhalt anknüpfen kann. Insgesamt bietet ein solches Vorgehen also viel Potential, besonders bei der Entwicklung und Aufrechterhaltung der Lernmoti-

⁵²Vgl.: Hußmann, S.: Mathematik entdecken und erforschen. Theorie und Praxis des Selbstlernens in der Sekundarstufe II. Berlin 2003, S. 15f.

vation bzw. auch überhaupt erst einmal der Motivation, sich mit dem Problem auseinander zu setzen. Diese Motivation und das Erlebnis bei der Teilnahme an diesem Versuch werden dazu führen, dass diese Unterrichtsstunde in Erinnerung bleibt, was die Gewähr dafür bietet, dass der Unterrichtsgegenstand nicht so schnell vergessen werden kann, was wiederum eine Grundvoraussetzung für ein umfassendes Verständnis des Lehrinhalts ist.

5.4 Überlegungen zur Nutzung des Integraphen

Eine konkrete Unterrichtskonzeption soll an dieser Stelle nicht entwickelt werden. Dies hätte nur Sinn, wenn auch eine Erprobung und anschließende Evaluation erfolgen könnte; beides war zu keinem Zeitpunkt Anliegen dieser Ausarbeitung. Dennoch sollen allgemeine Überlegungen zum prinzipiellen Einsatz des Integraphen im Unterricht angestellt werden.

Werner Blum⁵³ hat sich 1981 ebenfalls mit Einsatzmöglichkeiten des Integraphen in der Schule beschäftigt. Für ihn besteht der hauptsächliche didaktische Wert des Geräts darin, ihn zur Begründung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung heranzuziehen. Dies realisiert er, indem er den Integraph als reines Anschauungsobjekt nutzt, während er gedanklich beliebige Funktionen durch Treppenfunktionen approximiert. Für Treppenfunktionen kann man sich die Gültigkeit des Hauptsatzes leicht überlegen. Mit Hilfe des Integraphen wird dies nun auf beliebige Funktionen erweitert. Die technische Realisierung des Gerätes lässt er dabei komplett außen vor, für ihn zählen nur Wirkungsweise und Prinzip.

Dieser Ansicht soll hier nicht gefolgt werden. Stattdessen werden zwei andere Szenarien des Einsatzes betrachtet:

⁵³Vgl.: Blum, W.: Der Integraph im Analysisunterricht - Ein altes Gerät in neuer Verwendung. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 14 (1982), S. 25-30.

1. Die Differentialrechnung wurde abgeschlossen. Der Integraph wird nun beim Einstieg in die Integralrechnung benutzt.
2. Die Integralrechnung ist im Wesentlichen behandelt worden. Nun kann mit dem Integraph eine Festigung der Kenntnisse bei den Schülern vorgenommen werden.

Dabei soll der Integraph vordergründig mit dem Ziel eingesetzt werden, die unter 5.2.2 genannten Probleme der Schüler zu beseitigen. Grundlage dafür ist die Tatsache, dass der Integraph keine Black-Box⁵⁴ ist, sein Vorteil besteht darin, dass seine Funktionsweise durchschaut werden kann. Eine motivationsfördernde Wirkung stellt sich aber erfahrungsgemäß erst ein, wenn es tatsächlich gelungen ist, die Funktionsweise zu verstehen. Es ist nicht einzusehen die Betrachtungen lediglich auf das Arbeitsprinzip zu beschränken; dann könnte man sich eine entsprechende Maschine auch denken, deren Zeichenstift bei F immer die Richtung $f(x)$ hat. Gerade aber das Verstehen der technischen Umsetzung führt auf jene trigonometrischen Zusammenhänge, die das Verständnis für die Integralrechnung erweitern, indem dann nämlich verstanden werden kann, wie Stammfunktionen konstruiert werden. Damit löst man sich zunächst einmal von der alleinigen Fixierung auf den Flächeninhaltsaspekt und rückt den prinzipiellen Zusammenhang einer Funktion mit ihrer Stammfunktion in den Fokus. Natürlich kostet dies Zeit, denn die Schüler sind es absolut nicht gewohnt sich mit technischen Fragestellungen auseinander zu setzen. Besonders dem Verstehen der Funktion des Schneidenrades muss Aufmerksamkeit gewidmet werden. Seine Wirkungsweise lässt sich tatsächlich erst im Betrieb erkennen, aber kaum, wenn man sich nur überlegt, wie Schneidenrad und Fahrstift

⁵⁴Vgl.: Siller, H.-S.: Computerunterstützter Analysis-Unterricht. Auf Mathematica basierende Lerneinheiten zur Differential- und Integralrechnung mit M@thDesktop. Saarbrücken 2008, S. 30 sowie Blum, W.: Integraph, S. 27. Siller bezieht sich dabei zwar auf einen virtuellen Integraphen, seine Betrachtungen haben aber allgemeine Gültigkeit.

verbunden sind. Dafür tritt bei diesen Betrachtungen der Funktionencharakter der Stammfunktion umso deutlicher hervor. Im Prozess des Entstehens einer Stammfunktion kann den Schülern die Stammfunktion als Funktion im Allgemeinen bewusst werden. Der Zusammenhang eines Graphen mit seiner Stammfunktion kann direkt erlebt und ausprobiert werden. Blum⁵⁵ weist darauf hin, dass der Integrator als reines Hilfsmittel anzusehen ist, von dem sich der Schüler unbedingt lösen können muss. Dass ist zweifelsfrei richtig, dennoch ist doch auch schon etwas erreicht, wenn man das Verständnis der Schüler für den Integralbegriff mittels des Integrators erweitern konnte, ohne dass sie auch ohne das Gerät diesen Aspekt sofort anwenden können.

1. Die Schüler verfügen über Kenntnisse der Differentialrechnung. Außerdem ist ihnen das Prinzip der Umkehrfunktion bekannt. Führt man ihnen das Gerät einmal vor und lässt dann die entstandene Kurve mit der vorgegebenen Kurve vergleichen, so dürfte die Erkenntnis nicht lange auf sich warten lassen, dass letztere die Ableitung der ersten ist. Nun können die Schüler untersuchen, wie das Gerät dies gemacht hat. Im Endeffekt gelangt man so zu einer Erstellungsmöglichkeit von Stammfunktionen und gleichzeitig zu einem Überblick über den Zusammenhang beider Kurven. Es können sich Überlegungen anschließen, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit eine Stammfunktion gezeichnet werden kann: Muss die Funktion stetig sein? Genügt stückweise Stetigkeit? Warum? Gibt es Kurven, für die keine Stammfunktion gezeichnet werden kann? Ist die Stammfunktion eindeutig?
2. Die Schüler verfügen über Kenntnisse der Integralrechnung. Sie wissen, was eine Stammfunktion ist und wie man sie bestimmt. Das Gerät wird ihnen als Stammfunktionszeichner vorgestellt mit dem Auftrag, die Funk-

⁵⁵Vgl.: Blum, W.: Integrator, S. 28.

tionsweise zu untersuchen. Dies wird die Schüler auf eine geometrische Bestimmung der Stammfunktion führen, während sie bisher nur eine analytische und eventuell numerische Bestimmung kannten. Es kann untersucht werden, warum ausgerechnet die Flächeninhaltsfunktion gezeichnet wird oder welche Voraussetzungen an die zu integrierende Funktion gestellt werden müssen. Bezüglich dieser Fragen haben die Schüler Vorkenntnisse aus dem Unterricht, die nun anschaulich überprüft werden können. Auch die ihnen bekannten numerischen Verfahren können zu einem Vergleich herangezogen werden, um einerseits zu bestimmen, wie gut diese Verfahren sind, und andererseits zu sehen, was der mathematische Hintergrund ist. In jedem Falle wird das Integralverständnis erweitert und der Funktionscharakter der Stammfunktion verdeutlicht.

Offen bleibt bei dieser Herangehensweise, wann eine Funktion im Allgemeinen integrierbar ist, welche Existenzaussagen für Stammfunktionen getroffen werden können und wie z.B. mit uneigentlichen Integralen verfahren werden kann. Da der Integrator aber das Verständnis für den Begriff der Stammfunktion erweitern soll und nicht alleiniges Mittel im Unterricht ist, wird dies den Lernerfolg nicht negativ beeinflussen können.

Es soll nicht unerwähnt bleiben, dass noch andere Einsatzgebiete denkbar sind. Auch in der Stochastik begegnet den Schülern mit der Dichtefunktion der Normalverteilung eine nicht geschlossen integrierbare Funktion. Gerade mit dem Abstand, den die Schüler in dieser Unterrichtseinheit von der Integralrechnung gewonnen haben, kann eine sinnvolle Wiederholung der Integralrechnung verbunden werden mit der Möglichkeit, den Integralbegriff nun anschaulich geometrisch zu motivieren und dabei einen Integrator zu nutzen.

Leistungsstarke Schüler könnte man (in welchem organisatorischen Rahmen auch immer) damit beauftragen, selbst einen Integrator zu bauen oder auch

eine Schleppe, wie sie Vietoris⁵⁶ beschreibt, siehe Abb. 17⁵⁷ Ihre Funktionsweise

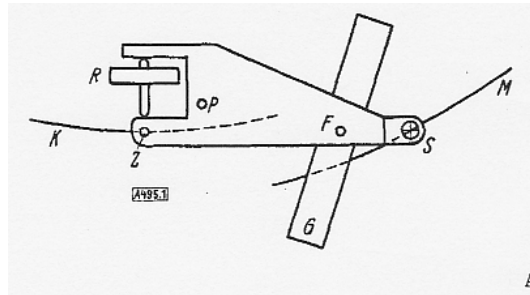


Abbildung 17: Schleppe nach Vietoris

soll nicht näher erläutert werden, da sie kein Integraph im eigentlichen Sinne ist, jedoch sind alle Grundlagen, die notwendig sind, um ihre Funktionsweise zu verstehen, prinzipiell in Abschnitt 2 erwähnt. Es soll damit nur verdeutlicht werden, dass es zahlreiche Möglichkeiten gibt Integrationsverfahren im Unterricht zu thematisieren.

Fazit

Ob es sinnvoll sein kann, einen Integraphen im Unterricht einzusetzen, muss jeder Lehrer selbst entscheiden. Er ist und bleibt ein Hilfsmittel zur näherungsweisen Bestimmung der Integralkurve. Allerdings gewährt er einen Einblick in seine Funktionsweise; diese Chance sollte man nutzen, um die Schülervorstellungen vom Integralbegriff und dem Funktionscharakter der Stammfunktion zu erweitern.

⁵⁶Vietoris, L.: Ein einfacher Integraph. In: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 15 (1935), S. 238-242, hier S. 238.

⁵⁷Ebd.

6 Abschließende Bemerkungen

Mit der vorliegenden Arbeit sollte es gelungen sein, dem Begriff des Integrals etwas von seinem Schrecken zu nehmen. Die angestellten Betrachtungen haben gezeigt, dass sowohl die graphischen als auch die mechanischen Methoden zur Zeichnung einer Integralkurve prinzipiell einfach zu verstehen sind, nur in der Anwendung aufwendig sind. Ein erstaunliches Resultat ist jedoch, dass ein so unscheinbares Gerät wie das Polarplanimeter keinesfalls einfacher zu verstehen ist als ein auf den ersten Blick hochkomplex aufgebauter Integrator. Gerade das sollte aber dazu ermutigen, sich viel intensiver mit der Funktionsweise von mathematischen Geräten zu befassen. Wie sich gezeigt hat ist das Arbeitsprinzip des Integrators daraus entstanden, die Anweisung zur graphischen Ermittlung einer Stammfunktion einfach technisch umzusetzen. Auch bei anderen Geräten ist dies der Fall und es lohnt sich, dies zu untersuchen, denn wie gezeigt wurde erhält man dadurch einen dynamischen Einblick in Konstruktionen, denen ein sehr statisch wirkender Begriff zu Grunde liegt. Die Möglichkeit, solche Geräte im Unterricht einzusetzen, sollte in jedem Falle wahrgenommen werden - beide Seiten können nur dazu lernen.

Die Aufnahme allgemeiner Planimeter und Integratoren, z.B. Potenzplanimeter, hätte den Rahmen dieser Arbeit gesprengt. Eine Beschäftigung mit diesen Geräten ist dennoch hochinteressant und jedem Interessierten zu empfehlen. Das größte Vergnügen bleibt jedoch, den Geräten beim Funktionieren staunend zuzusehen.

Literatur

- [1] Abdank-Abakanowicz, B.: Die Integraphen. (deutsch bearbeitet von E. Bitterli) Leipzig 1889.
- [2] [Anon.]: Meyers Lexikon. Sechster Band. 7. neu bearb. Auflage. Leipzig 1927.
- [3] [Anon.]: Meyers neues Lexikon. Band 6. 2. neu erarb. Auflage. Leipzig 1973.
- [4] Blum, W.: Der Integraph im Analysisunterricht - Ein altes Gerät in neuer Verwendung. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 14 (1982), S. 25-30.
- [5] Danckwerts, R., Vogel, D.: Analysis verständlich unterrichten. Berlin Heidelberg 2006.
- [6] Galle, A.: Mathematische Instrumente. Leipzig, Berlin 1912.
- [7] Gottwald, Prof. Dr. S. u.a. (Hrsg.): Meyers kleine Enzyklopädie Mathematik. 14. neu bearb. und erw. Auflage. Mannheim 1995.
- [8] Hashagen, U.; Hellige, H. D. (Hrsg.): Rechnende Maschinen im Wandel: Mathematik, Technik, Gesellschaft. Festschrift für Hartmut Petzold zum 65. Geburtstag. o.O. 2011.
Internetquelle, zuletzt eingesehen am 24.08.2011 unter
www.deutsches-museum.de/forschung/publikationen/preprints/
- [9] Hußmann, S.: Mathematik entdecken und erforschen. Theorie und Praxis des Selbstlernens in der Sekundarstufe II. Berlin 2003.
- [10] Kultusministerium Sachsen-Anhalt: Rahmenrichtlinien Gymnasium Mathematik. Schuljahrgänge 5-12. o.O. 2003.

- [11] Leuders, T. u.a.: Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II. 5. Auflage. Berlin 2011.
- [12] Leupold, W. u.a.: Analysis für Ingenieur- und Fachschulen. 3. Auflage. Leipzig 1968.
- [13] Meyer zur Capellen, W.: Mathematische Instrumente. 2. ergänzte Auflage. Leipzig 1944.
- [14] Ott, A.: Gebrauchsanweisung für den Integrator „Adler-OTT“. Kempten o.J.
- [15] Schröder, K.: Mathematik für die Praxis II. Ein Handbuch. 3. berichtigte Auflage. Berlin 1966.
- [16] Siller, H.-S.: Computerunterstützter Analysis-Unterricht. Auf Mathematica basierende Lerneinheiten zur Differential- und Integralrechnung mit M@thDesktop. Saarbrücken 2008.
- [17] Tietze, U.-P. u.a.: Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II. Braunschweig 1982.
- [18] Vietoris, L.: Ein einfacher Integrator. In: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 15 (1935), S. 238-242.
- [19] Vietoris, L.: Zur Theorie der Integratoren. In: Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 52 (1942), S. 71-74.
- [20] Willers, Fr. A.: Mathematische Maschinen und Instrumente. Berlin 1951.

Abbildungsverzeichnis

1	Graphische Integration mittels Tangenten	11
2	Graphische Integration nach Abdank-Abakanowicz.	12
3	Richtungsfeld am Beispiel $F'(x)=x$	13
4	Integration nach Abdank-Abakanowicz	16
5	Grundaufbau Polarplanimeter	20
6	Kinematik des Polarplanimeters	21
7	Hilfsbetrachtung zu Abb. 6 auf Seite 21	21
8	Messwerk am Planimeter	23
9	Umrechnungstabelle	23
10	Entwurf von Abdank-Abakanowicz	29
11	Konstruktion einer Stammfunktion	30
12	Integraph Abdank-Coradi	32
13	Integraph Adler-Ott	34
14	Aufgebauter Integraph der Firma Ott	35
15	Lenkarmeinstellung	36
16	Tabelle mit Einstellwerten für Lenkarm	36
17	Schleppe nach Vietoris	50

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Hausarbeit selbstständig angefertigt habe, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und die Stellen der Arbeit, die ich im Wortlaut oder im wesentlichen Inhalt anderen Werken entnommen habe, mit genauer Angabe der Quellen kenntlich gemacht habe.

....., den

(Ort)

(Datum)

.....

(Unterschrift)