Das Bedienen von mechanischen Rechenmaschinen bzgl. der 4 Grundrechenarten sowie die Schrittfolgen zur Berechnung von Wurzeln und Potenzreihen (z.B. e-Funktionen und Sinus-Funktionen)

Dipl.-Ing. Kai-Uwe Ekrutt

1.Ausgabe
Mai 2005

Beispiel einer Staffelwalzen-Rechenmaschine in der technisch brilliant umgesetzten zylindrischen Bauweise der „ CURTA I “

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Skript soll anhand anschaulicher Rechenbeispiele und durch die zusätzlichen Erklärungen zu den sogenannten Vierspezies-Rechenmaschinen dazu dienen, den Leser schrittweise an das „mechanische“ Rechnen mit Sprossenrad- und Staffelwalzen-Rechenmaschinen heranzuführen. Beginnend mit leichten Additions/Subtraktions- sowie Multiplikationsaufgaben wird der Weg dafür geebnet, um immer anspruchsvollere Rechenmethoden bzw. -verfahren zu erfahren und zu nutzen. Das völlig aus der Mode gekommene Rechnen mit alten Handkurbelmaschinen, aber auch der Umgang mit Rechenschiebern und Tafelwerken, ist durch das alltägliche Verwenden von handlichen Elektronik-Taschenrechnern und durch die Personalcomputer weitestgehend verdrängt worden und in Vergessenheit geraten. Die leichte und bequeme Handhabung von Taschenrechnern, die schon in Millisekunden ein Ergebnis auf das Display erscheinen lassen, hat dazu geführt, daß man zunehmend unsicherer geworden ist, was die Kontrolle von Resultaten angeht und was das Gefühl für ein richtiges (sinnvolles) Ergebnis betrifft. Dieses „Gefühl“ kann man sich aneignen bzw. weiterhin erhalten, wenn diverse Berechnungen gelegentlich handschriftlich ausgeführt werden, also „zu Fuß“ erledigt werden, ohne auf elektronische Hilfsmittel zugreifen zu müssen. Das ist zwar manchmal sehr zeitraubend, aber es übt und schult einen immer wieder, korrekt mit Zahlen umzugehen. Zum anderen ergibt sich damit auch die Gelegenheit, sich des altbewährten Kopfrechnens zu bemächtigen, was heutzutage nicht selten etwas „eingerostet“ ist. Mit der vorliegenden Anleitung wird nun nicht direkt das Kopfrechnen geschult, aber sie hilft dabei zu verstehen, wie z.B. Zahlen schematisch miteinander multipliziert werden, wie sich ein Ergebnis bei der Divisionsrechnung aufbaut und welche Näherungsverfahren es sonst noch gibt, um komplexere Rechnungen ausführen zu können. Je weiter sich der Leser in diesem Skript vorarbeitet, desto höher wird der Anspruch an den notwendigen mathematischen Rechenkenntnissen, wenn es schließlich daran geht, Wurzelberechnungen anzustellen oder gar Sinuswerte zu erzeugen. Dabei wäre es sehr vorteilhaft, sich erstmal die notwendigen Kenntnisse anzueignen, um überhaupt zu verstehen, was man an der Maschine zusammenkurbelt. Für diejenigen, welche die Bemühungen nicht scheuen und sich die korrekte Bedienung von alten mechanischen Rechenmaschinen zu Eigen machen wollen, ist es allemal eine wunderbare Übung mit dem schlichten Umgang von Zahlen. Das kann manchmal sehr reizvoll sein und gelegentlich sogar Spaß (Bestätigung, Zufriedenheit oder Genuß) bereiten, wenn es einem gelingt, nach rasanten Kurbeleien und nach den verschiedenen Einstellungen das richtige Ergebnis vorzufinden.
-quod erat demonstrantum!-

Aufbau und Bezeichnungen bei mechanischen Rechenmaschinen

Für jemanden, der zum ersten mal eine der alten mechanischen Rechenmaschinen zu Gesicht bekommt, ist es überaus wichtig zu wissen, welche Zählwerke es überhaupt gibt und wofür die verschiedenen Hebel und Tasten verantwortlich sind. Deswegen kann es nur hilfreich sein, sich mit den Funktionen der Maschine vertraut zu machen, was am besten dadurch gelingt, wenn sich der Bediener spielerisch an die verfügbaren Einstellmöglichkeiten herantastet und beobachtet, was bei dieser oder jener Hebel- oder Kurbelbewegung geschieht. Mit den ersten Gehversuchen sollte es zumindestens möglich sein, etwas Gespür für das Arbeiten mit dem Triebwerk und mit dem Wagen (Schlitten) zu bekommen.

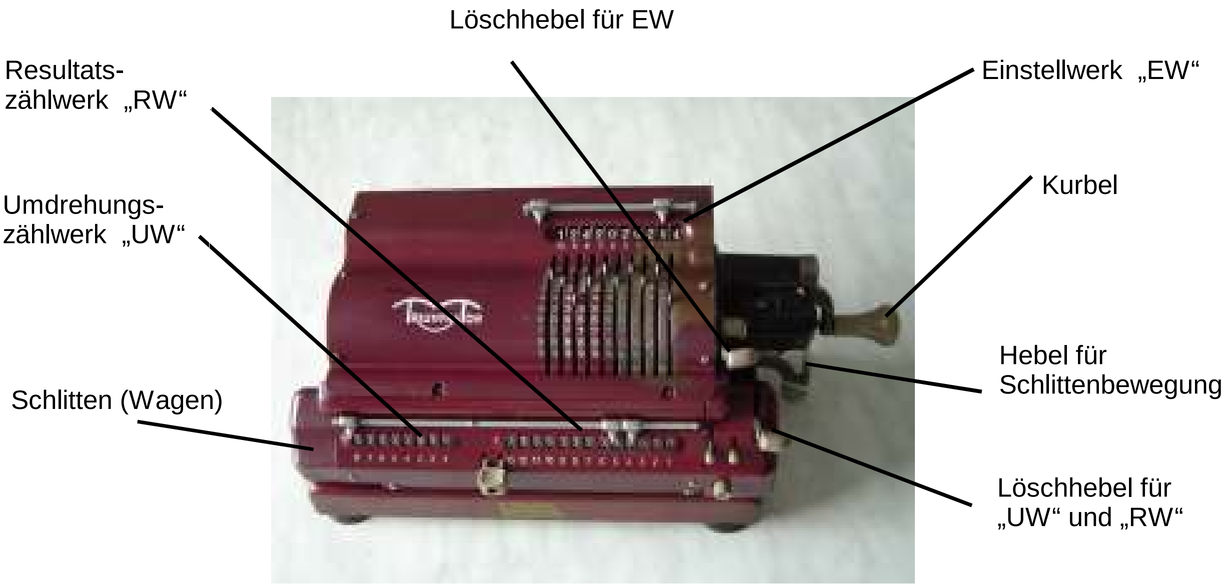

Bild: Rechenmaschine „Triumphator“ EW x RW x UW = 10 x 13 x 8

Wird das Deckblech der Rechenmaschine abgenommen, so können wir einen Blick auf die Trommel bzw. auf die Walze mit den Sprossenrädern werfen und es offenbaren sich die vielen Zahnräder für die Übertragung auf die Zählwerke. Weitere Triebwerkszahnräder sind dafür verantwortlich, daß durch die Kurbeldrehbewegung die Sprossenwalze angetrieben wird. [siehe Bilder vom Innenleben einer Triumphator-Rechenmaschine]

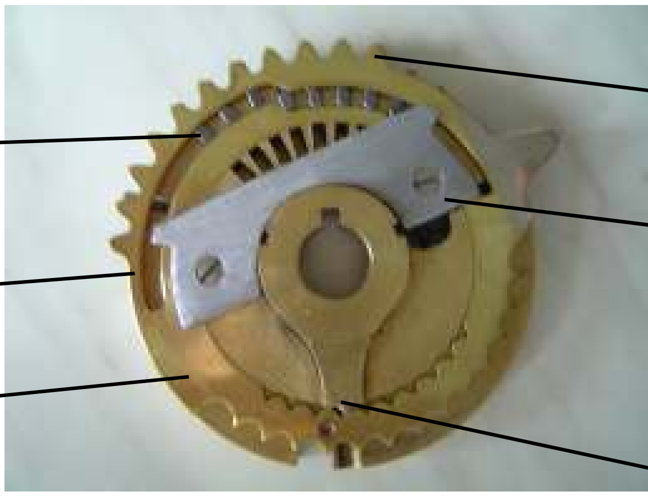

Bild: Einzelnes Sprossenrad

Bild: Rückseite des Sprossenrades

Das Herzstück der Walze bilden die Sprossenräder, die als einzelne Scheiben hintereinander angeordnet sind. Über Stellzacken bzw. -zähne werden die einzelnen Zahlenwerte per Hand eingestellt, wobei je nach Zahlenwert eine entsprechende Anzahl von Sprossen hochgedrückt wird. Dieses geschieht über eine ausgesparte Führung (Kurve) in der Einstellscheibe, entlang derer sich die Sprossen radial bewegen können. Durch das manuelle Drehen des Stellsegmentes wird gleichzeitig der Zahlenwert durch die Zähne der Einstellscheibe in das Einstellzählwerk „EW“ (Ziffernrolle) transportiert. Die „aktiv“ nach außen zeigenden Sprossen haben dagegen die Aufgabe, je Kurbelumdrehung das Resultatszählwerk zu bewegen. Dabei dienen die beiden gefederten Sprossen für den gelegentlichen Zehnerübertrag, je nachdem ob eine Addition oder eine Subtraktion durchgeführt wird.

Im linken Bereich der Walze befinden sich die Sprossenscheiben für das Umdrehungszählwerk „UW“, welche im vorliegenden Beispiel der „Triumphator“ nur über 2 Sprossen je Scheibe verfügen. Diese sind dazu da, um je Kurbelumdrehung das Zählwerk bei Zehnerüberträgen um 1 zu erhöhen bzw. zu verringern. Nur die erste Scheibe besitzt 3 Sprossen, denn allein die rechts angeordnete einzelne Sprosse verstellt das Zählwerk „UW“ je Umdrehung um den Wert 1 an der entsprechenden Stelle der Schlittenposition (in den dargestellten Bildern nicht ersichtlich).

Im wesentlichen wären damit die signifikanten Bauteile einer Sprossenradmaschine kurz umrissen, womit denn auch die ersten Gehversuche einer Berechnung in Angriff genommen werden sollen. Die meisten der folgenden Berechnungen werden mit einer Maschine ausgeführt, deren Zählwerke eine Anzeigekapazität von [10 x 13 x 8] = [EW x RW x UW] besitzt. Dazu gehören z.B. die Brunsviga 13ZK oder RK, die Thales Patent, die Original-Odhner M602n oder die in den Bildern schon angesprochene Triumphator. Eine Zählwerkskapazität von [10x16x8] verfügt z.B. die Walther vom Typ WR16 oder die Melitta VI/16, womit eine höhere Rechengenauigkeit erzielt werden kann. Obwohl das Rechentableau der folgenden Aufgaben mehr als 13 Stellen bzgl des RW aufweist, sollen hier nur Rechenbeispiele mit höchstens 13 Stellen behandelt werden, da die damit erlangte Genauigkeit meist als völlig ausreichend angesehen werden kann.

1. Die Addition

<u>Aufgabe 1.1:</u>
Als erste Aufgabe soll die Addition zweier Zahlen mit Dezimalstellen durchgeführt werden:

534,2235 + 417, 1700 = 951,3935

Am Anfang stellt sich erstmal die Frage, mit wievielen Stellen bzw. Dezimalstellen gerechnet wird. Für das gewählte Beispiel ist eine Dezimalstellenzahl von 4 vorausgesetzt worden. D.h., beim EW der Rechenmaschine wäre zwischen der Stelle 4 und 5 das Komma zu setzen, um sich beim Einstellen der Zahlenwerte besser orientieren zu können.

<u>Rechentableau an der Rechenmaschine:</u>

								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	1
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	2

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	0	0	5	3	4'	2	2	3	5	↑	Drehung Addition
RW						0	0	0	0	0	0	5	3	4'	2	2	3	5	1x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	0	0	4	1	7'	1	7	0	0	↑	Drehung Addition
RW						0	0	0	0	0	0	9	5	1'	3	9	3	5	1x	

Nachdem alle Zählwerke durch entsprechende Löschhebel auf Null gesetz worden sind, wird als erster Schritt der Schlitten auf die Einerstelle bewegt, also auf die Stellenposition „1“. Danach wird der Zahlenwert 534' 2235 im EW eingestellt und eine Kurbeldrehung in „Plus“-Richtung durchgeführt. Darauf folgt das Einstellen des zweiten Summanden 417' 1700 in das EW. Es wird erneut eine positive Kurbeldrehung durchgeführt, womit im Resultatszählwerk die Summe 951' 3935 erscheint. Im Zählwerk UW liegt als Zahlenwert 2 vor (die insgesamt durchgeführten Additionsschritte).

<u>Aufgabe 1.2:</u>

Folgende Summanden sollen addiert werden:

1252,55 . .
+307,143 .
+454,6313
<u>+454,6313</u>
2468,955 .   aufgerundet -> 2468,96

Die Punkte bedeuten, daß dort bei den Summanden keine genaue Angabe gemacht werden kann, d.h., an diesen Stellen ist eine Genauigkeit nicht mehr vorgegeben. Deshalb wird erstmal eine Entscheidung darüber getroffen, mit wievielen Kommastellen sinnnvollerweise gerechnet wird. Da alles von der Ungenauigkeit des ersten Summanden abhängt, reicht es völlig aus, mit 3 Dezimalstellen zu rechnen (insgesamt 7 Stellen am Einstellwerk). Nach erfolgter Rechnung wird dann auf die zweite Dezimalstelle auf- oder abgerundet.

<u>Rechentableau an der Rechenmaschine:</u>
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	1
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	2
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	4

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	0	0	1	2	5	2'	5	5	0	↑	Drehung Addition
RW						0	0	0	0	0	0	1	2	5	2'	5	5	0	1x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	0	0	0	3	0	7'	1	4	3	↑	
RW						0	0	0	0	0	0	1	5	5	9'	6	9	3	1x	Drehung Addition
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	0	0	0	4	5	4'	6	3	1	↑	
RW						0	0	0	0	0	0	2	4	6	8'	9	5	5	2x	2x Drehung Addition

Wegen der Unsicherheit in der 3. Dezimalstelle des ersten Summanden, wird das Resultat 2468,955 aufgerundet zu 2468,96.

2. Die Subtraktion

<u>Aufgabe 2.1:</u>
Wenn die Rechenmaschine einen Hebel bzw. eine Umstellmöglichkeit für Addition und Subtraktion besitzt, über die der Zählsinn im Umdrehungszählwerk gewechselt werden kann, dann ließe sich über die Anzeige des UW die Anzahl der durchgeführten Operationen (Kurbeldrehungen) ablesen. In folgendem Beispiel würde sich im UW die Ziffer 2 anstatt 0 zeigen. Da die Kenntnis über die Operationsschritte im Fall der Addition/Subtraktion weniger von Bedeutung ist, wird in den folgenden Beispielen in (+)Richtung gerechnet. D.h., Rechtsdrehung ↑ der Kurbel zählt vorwärts (Addition), Linksdrehung ↓ der Kurbel zählt rückwärts (Subtraktion).

54 316,44 - 16 824,52 = 37 491,92

<u>Rechentableau an der Rechenmaschine:</u>
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

								⋎
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	1
								⋎
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	0

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	0	0	5	4	3	1	6'	4	4	↑	Drehung Addition
RW						0	0	0	0	0	0	5	4	3	1	6'	4	4	1x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW									0	0	0	1	6	8	2	4'	5	2	↓	Drehung Subtraktion
RW						0	0	0	0	0	0	3	7	4	9	1'	9	2	1x	

Ergebnis im RW = 37 491,92

<u>Aufgabe 2.2:</u>

Die nächste Aufgabe zeigt eine Mischrechnung aus Addition und Subtraktion.

73,54 + 3x 8,33 – 2x 14,28 = 69,97

73,54
\+ 8,33
\+ 8,33
\+ 8,33
\- 14,28
<u>- 14,28</u>
69,97

<u>Rechentableau an der Rechenmaschine:</u>
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

								⋎
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	1
								⋎
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	4
								⋎
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	2

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	0	0	0	0	0	7	3'	5	4	↑	Drehung Addition
RW						0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	3'	5	4	1x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	0	0	0	0	0	0	8'	3	3	↑	3x Drehung Addition
RW						0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	8'	5	3	3x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW									0	0	0	0	0	0	1	4'	2	8	↓	2x Drehung Subtraktion
RW						0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	9'	9	7	2x	

Ergebnis im RW = 69,97

<u>Aufgabe 2.3:</u>

Eine weitere Aufgabe mit einer Mischrechnung aus Addition und Subtraktion. Wegen der Ungenauigkeit im ersten Summand reicht eine Rechnung mit 3 Deziamlstellen aus.

183, 45 . . . + 22,734 . - 6,8832 + 19,485 . - 42,603 . = 176,18(3).

183,45 .
\+ 22,734
\- 6,883
\+ 19,485
<u>- 42,603</u>
176,183 abgerundet -> 176,18

<u>Rechentableau an der Rechenmaschine:</u>
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	1
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	2
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	1
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	2
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	1

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	0	0	1	8	3'	4	5	0	↑
RW						0	0	0	0	0	0	0	1	8	3'	4	5	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	0	0	0	2	2'	7	3	4	↑
RW						0	0	0	0	0	0	0	2	0	6'	1	8	4	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-
EW									0	0	0	0	0	0	6'	8	8	3	↓
RW						0	0	0	0	0	0	0	1	9	9'	3	0	1	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	0	0	0	1	9'	4	8	5	↑
RW						0	0	0	0	0	0	0	2	1	8'	7	8	6	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-
EW									0	0	0	0	0	4	2'	6	0	3	↓
RW						0	0	0	0	0	0	0	1	7	6'	1	8	3	1x

Ergebnis im RW = 176,183

3. Die Aufteilung im EW und RW für parallel laufende Rechengänge

Sofern die Stellenanzahl der beiden Zählwerke EW und RW als ausreichend erscheinen, kann es für bestimmte Berechnungen (z.B. Dreisatzaufgaben) sehr vorteilhaft sein, wenn man die Anzeigen in ein rechtes und ein linkes Feld trennt. Als ein einfaches Beispiel soll nun die Berechnung der Fibonacci-Folge angeführt werden.

<u>Aufgabe 3.1: Die Fibonacci-Folge</u>

Folge mit den Anfangsgliedern: $a_0 = 0$
$a_1 = 1$

Berechnungsschritt für die Folge: $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$ n = 1; 2; 3; ......

Die weiteren Folgeglieder:

$a_2 = 1$	$a_9 = 34$
$a_3 = 2$	$a_{10} = 55$
$a_4 = 3$	$a_{11} = 89$
$a_5 = 5$	$a_{12} = 144$
$a_6 = 8$	$a_{13} = 233$
$a_7 = 13$	$a_{14} = 377$
$a_8 = 21$	$a_{15} = 610$
	usw.

In unserem Beispiel soll die linke Hälfte des EW das Folgeglied a_n darstellen, die rechte Hälfte dagegen a_{n-1}. Bei dem Resultatszählwerk RW entspricht die linke Hälfte a_{n+2} und die rechte a_{n+1}. Im allgemeinen läuft das Rechenschema so ab, daß a_n der „Speicherübertrag" für a_{n-1} werden soll und a_{n+1} der Übertrag für a_n wird. Verfährt man nach diesen Schritten, so zeigen sich stets vier aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen am Zählwerk EW und RW.
Die Aufteilung der Zählwerke erfolgt in der Weise, daß die Stellen 1-5 des EW zur rechten und die Stellen 6-10 zur linken Hälfte gehören. Analog gilt das auch für die Anzeige des RW.

Rechentableau an der Rechenmaschine:
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

								↓		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	↑	Vorbereitungsschritt
UW	0	0	0	0	0	0	0	1	RW						0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1x	
								↓		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	↑	Vorbereitungsschritt
UW	0	0	0	0	0	0	0	2	RW						0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1	1x	
								↓		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	↑	Start der Folge
UW	0	0	0	0	0	0	0	3	RW						0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	2	1x	a1 ... a4
								↓		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	0	0	2	0	0	0	0	1	↑	a2 ... a5
UW	0	0	0	0	0	0	0	4	RW						0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	3	1x	
								↓		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	0	0	3	0	0	0	0	2	↑	a3 ... a6
UW	0	0	0	0	0	0	0	5	RW						0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	5	1x	
								↓		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	0	0	5	0	0	0	0	3	↑	a4 ... a7
UW	0	0	0	0	0	0	0	6	RW						0	0	0	0	0	0	1	3	0	0	0	0	8	1x	
								↓		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	0	0	8	0	0	0	0	5	↑	a5 ... a8
UW	0	0	0	0	0	0	0	7	RW						0	0	0	0	0	0	2	1	0	0	0	1	3	1x	
								↓		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	0	1	3	0	0	0	0	8	↑	a6 ... a9
UW	0	0	0	0	0	0	0	8	RW						0	0	0	0	0	0	3	4	0	0	0	2	1	1x	
								↓		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	0	2	1	0	0	0	1	3	↑	a7 ... a10
UW	0	0	0	0	0	0	0	9	RW						0	0	0	0	0	0	5	5	0	0	0	3	4	1x	

usw.... In der rechten Hälfte des RW wird das Folgeglied $a_9 = 34$ angezeigt.

Dieses ist zwar ein sehr einfaches Beispiel, aber übt die ersten Schritte in die Richtung, um sich eine sinnvolle Aufteilung zunutze machen zu können, ohne nebenbei ein Blatt Papier für die Zwischenergebnisse parat halten zu müssen. Setzt man die Anzeige des UW mit dem Index des Folgegliedes gleich, so ist das rechte Ergebnis im RW der dazugehörige Wert.

Nebenbei bemerkt (zu den Fibonacci-Zahlen):

Der Mathematiker Fibonacci, der auch unter dem namen Leonardo di Pisa (1180? ... 1250? n.Chr.) bekannt ist, hat Einiges an mathematischen Wissen der Araber durch deren überlieferten Schriften in Erfahrung gebracht und weitere dazugewonnene Erkenntnisse in seinem bekannten Werk „Liber abaci“ niedergeschrieben, wobei er bei seinen Rechnungen schon die Null verwendete. Die nach ihm benannten Fibonacci-Zahlen tauchen zum ersten Mal im Jahre 1202 durch das von ihm untersuchte „Kaninchen-Problem“ auf. Das Problem beschäftigte sich mit der theoretischen Anzahl der Nachkommenschaft von Kaninchenpaaren, wenn folgende Annahmen vorausgesetzt werden:

1) Am Anfang gibt es ein Kaninchenpaar.
2) Das Weibchen eines Kaninchenpaares gebiert nach Vollendung des 2. Lebensmonats an jeden Monat ein neues Kaninchenpaar.
3) Theoretisch soll vorausgesetzt werden, daß keines der Kaninchen bzw. Kaninchenpaare stirbt.

Frage: Wieviele Kaninchenpaare gibt es nach n Monaten?

Antwort:
1. Monat = **1**
2. Monat = **1**
3. Monat = (1+1) = **2**
4. Monat = (1+2) = **3**
5. Monat = (1+3) + 1 = 2+3 = **5**
6. Monat = (1+4) + (1+1) + 1 = 3+5 = **8**
7. Monat = (1+5) + (1+2) + (1+1) + 1 + 1 = 5+8 = **13**

usw.

In der Natur sind die Fibonacci-Zahlen sehr verbreitet und zeigen sich in Form von Populationszuwächsen sowie in den Bauplänen des Wachstums bei Pflanzen und Tieren.

Beispiele:

- Stammbaum eines Bienenvolkes bzgl. Drohnen oder Arbeiterinnen
- Anzahl von Astverzweigungen bei Pflanzen
- Anzahl der Blütenblätter bestimmter Blumen:

Lilie, Iris	= 3
Butterblume, Wildrosen, Rittersporn, Akelei	= 5
Dotterblume	= 13
Aster, Zichorie	= 21
Wegerich	= 34
Gänseblümchen	= 55 od. 89

- Die Anzahl der Spiralen von den Samen der Sonnenblumen und bei Tannenzapfen, wobei es gleichzeitig linksgewundene und rechtsgewundene Spiralen gibt, die unterschiedlichen Fibonacci-Zahlen entsprechen. -> hieraus resultiert die optimale kompakte Anordnung der Körner
- Winkelversatz (Rotationssprünge von ca. 222,5° oder 137,5°) von Pflanzenblättern entlang des Stieles.
  -> optimale Stellung hinsichtlich Sonneneinstrahlung und Regenwasserfang
  Verhältnis der Rotationsprünge entspricht dem harmonischen Verhältnis: 222,5 : 137,5 = **1,618** ...
- Das Wachstum bei spiraligen Schneckenschalen (Fibonacci-Spirale) von innen nach außen.
  -> Radiusvektor der Spirale wächst um den Faktor **1,618**... je Vierteldrehung, was wiederum dem harmonischen Verhältnis entspricht (siehe den Wert φ unten).

Aber auch in der bildnerischen Kunst oder in der Architektur findet man die Verhältnisse zwischen den Fibonacci-Zahlen wieder, wenn es um die harmonische Teilung bzw. um den „Goldenen Schnitt“ geht. Denn das Verhältnis zweier benachbarter Fibonacci-Zahlen (bei höheren Folgegliedern) nähert sich allmählich dem Verhältnis des „Goldenen Schnittes“: $\varphi = 1 : 0{,}618034... = (1 + 0{,}618034...) : 1 = 1{,}618034...$

z.B.
13 : 8 = 1,625
89 : 55 = 1,61818...
377 : 233 = 1,618026... (wobei $\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{(5)} + \frac{1}{2} =$ **1,618033989**...)
610 : 377 = 1,618037...

<u>Aufgabe 3.2:</u>

Durch die Aufteilung der Zählwerke können natürlich auch zwei unabhängige Rechnungen zeitgleich durchgeführt werden.

linke Seite:		rechte Seite:	
	155,72		5411,9
	+ 91,35		+ 2743,6
	+ 208,39		+ 0,0
	455,46		8155,5

<u>Rechentableau an der Rechenmaschine:</u>
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	1
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	2
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	3

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									1	5	5'	7	2	5	4	1	1'	9	↑
RW						0	0	0	1	5	5'	7	2	5	4	1	1'	9	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	9	1'	3	5	2	7	4	3'	6	↑
RW						0	0	0	2	4	7'	0	7	8	1	5	5'	5	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									2	0	8'	3	9	0	0	0	0	0	↑
RW						0	0	0	4	5	5'	4	6	8	1	5	5'	5	1x

Ergebnisse im RW = 455,46 und 8155,5

4. Die Multiplikation

Bevor eine Multiplikation durchgeführt wird muß erstmal festgestellt werden, mit welchen Stellenanzahlen gerechnet werden kann. Handelt es sich um Faktoren mit nur wenigen Stellen, dann müssen diese Überlegungen natürlich nicht gemacht werden. Wieviele Stellen im EW eingestellt werden hängt maßgeblich von der Kapazität des RW ab. Wenn das RW über 13 Stellen verfügt, dann darf die Stellensumme der beiden Faktoren im allgemeinen nicht größer als 13 Stellen betragen.

Beispiele:	7 382 294 (7 Stellen)	x	695 547 (6 Stellen)	= 5 134 732 444 818 (13 Stellen)
	49 283 (5 Stellen)	x	20 153 413 (8 Stellen)	= 0 993 220 652 879 (13 Stellen)

Des weiteren sollte man sich im Klaren sein, wieviele Dezimalstellen, sofern welche vorhanden sind, das Resultatszählwerk RW anzeigen wird. Hier gilt: Summe aus Dezimalstellenanzahl von EW und UW ergibt die Dezimalstellenanzahl für das RW.

$$\mathrm{Dez}_{EW} + \mathrm{Dez}_{UW} = \mathrm{Dez}_{RW}$$
==================

Beispiel: 54,771 x 18,28 = 1001,21388

$$\mathrm{Dez}_{EW} + \mathrm{Dez}_{UW} = \mathrm{Dez}_{RW} = 3 + 2 = 5$$

Abschließend wäre evtl. folgende Vorgehensweise noch von Interesse. Um möglichst wenige Schlittenbewegungen (Stellenverschiebungen mit dem Wagen) bei der Multiplikation durchführen zu müssen, in den meisten Fällen bedeutet dieses auch eine Zunahme der durchzuführenden Kurbeldrehungen, ist es ratsam, im EW den Faktor mit der größten Stellenanzahl einzustellen.

Beispiel: 12 x 354 = 4248 , wobei 354 im EW eingestellt wird.

In diesem Fall würde das Resultat insgesamt durch 3 Kurbeldrehungen erreicht werden. Hätte man stattdessen die 12 im EW eingestellt, so würden insgesamt 12 Kurbeldrehungen nötig sein, wobei noch eine weitere Schlittenbewegung hinzukäme.

Variante 1:

								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	2
							↓	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	1	2

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	0	0	0	0	0	3	5	4	↑
RW						0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	0	8	2x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW								0	0	0	0	0	0	0	3	5	4	-	↑
RW						0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	2	4	8	1x

Variante 2:

								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	4
							↓	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	5	4
						↓		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	3	5	4

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	↑
RW						0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	8	4x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW								0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	-	↑
RW						0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	4	8	5x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW							0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	-	-	↑
RW						0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	2	4	8	3x

Es ist nicht unbedingt notwendig, diese Vorgehensweise zu beherzigen, aber es ist schon eine gewisse Verkürzung beim Rechengang erkennbar. Entweder werden die gegebenen Möglichkeiten ausgenutzt oder man muss zwangsläufig mehr kurbeln. Das kann jeder für sich selbst entscheiden.

4.1: Das Ausführen einer Multiplikationsrechnung

Beim Multiplizieren zweier Zahlen wird der eine Faktor im Einstellwerk EW vorgegeben und dann mittels der Schlittenbewegung Stelle um Stelle des zweiten Faktors in das Umdrehungszählwerk UW übertragen. Im Resultatszählwerk RW steht dann am Ende der Operationen das Produkt aus beiden Zahlen. Bei der Multiplikation wird also der Einstellwert (Faktor_1) zuerst mit den Einer-Stellen multipliziert, dann kommt die Schlittenbewegung auf die Hunderter-Stelle, dann auf die Tausender-Stelle usw. Folgendes Beispiel soll das Schema bei der Rechnung verdeutlichen:

132 x 341 = <u>2x</u> 1 x 341 + <u>3x</u> 10 x 341 + <u>1x</u> 100 x 341 =

682	Schlitten auf Stelle 1
+ 10 23 -	Schlitten auf Stelle 2
<u>+ 34 1- -</u>	Schlitten auf Stelle 3
45 012	

Es sind insgesamt 6 Kurbeldrehungen und 2 Schlittenbewegungen erforderlich. Im UW steht der Wert vom Faktor 132.

<u>Rechentableau an der Rechenmaschine:</u>
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	2
							▼	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	3	2
						▼		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	1	3	2

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	0	0	0	0	0	3	4	1	↑
RW						0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	8	2	2x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW								0	0	0	0	0	0	0	3	4	1	-	↑
RW						0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	9	1	2	3x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW							0	0	0	0	0	0	0	3	4	1	-	-	↑
RW						0	0	0	0	0	0	0	0	4	5	0	1	2	1x

<u>Aufgabe 4.2:</u>

Multiplikationsaufgabe: 4 898,97 x 24,494 = 4 898,97 x (24,504 – 0,010)
= 119 995, 37118

<u>Rechentableau an der Rechenmaschine:</u>
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0'	0	0	4
						▼		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0'	5	0	4
							▼	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0'	4	9	4
					▼			
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	4'	4	9	4
				▼				
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	2	4'	4	9	4

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	0	0	0	4	8	9	8	9	7	↑	Schlitten auf „1“
RW						0	0	0	0	0	0	1	9	5	9	5	8	8	4x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW							0	0	0	0	4	8	9	8	9	7	-	-	↑	Schlitten auf „3“
RW						0	0	0	0	2	4	6	9	0	8	0	8	8	5x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW								0	0	0	0	4	8	9	8	9	7	-	↓	Schlitten auf „2“
RW						0	0	0	0	2	4	2	0	0	9	1	1	8	1x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW						0	0	0	0	4	8	9	8	9	7	-	-	-	↑	Schlitten auf „4“
RW						0	0	0	2	2	0	1	5	9	7	1	1	8	4x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW					0	0	0	0	4	8	9	8	9	7	-	-	-	-	↑	Schlitten auf „5“
RW						0	0	1	1	9	9	9	5'	3	7	1	1	8	2x	

Kontrolle der Dezimalstellen im RW: $Dez_{EW} + Dez_{UW} = Dez_{RW} = 2 + 3 = 5$
Ergebnis im RW = 119 995,37118

Theoretisch hätte man auch an der Stelle 2 des Schlittens ganze 9 Kurbeldrehungen vollführen können, um auf das Ergebnis zu kommen. Aber wenn sich Kurbeldrehungen einsparen lassen, so sollte dieses wieder einmal genutzt werden. Denn 9 Umdrehungen in positiver Richtung auf Stelle 2 entsprechen genauso einer Umdrehung in negativer Richtung auf Stelle 2 mit einer zusätzlichen positiven Umdrehung auf der Stelle 3.

024 494	entspricht ebenso	024 504 – 000 010	
(23x kurbeln)		(16x kurbeln)	, also 7 Kurbeldrehungen weniger.

Aufgabe 4.3:

Multiplikationsaufgabe: 3 746,8 x 639,7 = 3 746,8 x (1 040,0 – 400,3)
= 2 396 827,96

Rechentableau an der Rechenmaschine:
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

						▼		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	4	0'	0
				▼				
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	1	0	4	0'	0
					▼			
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	6	4	0'	0
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	6	3	9'	7

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW							0	0	0	0	0	3	7	4	6	8	-	-	↑
RW						0	0	0	0	0	1	4	9	8	7	2	0	0	4x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW					0	0	0	0	0	3	7	4	6	8	-	-	-	-	↑
RW						0	0	0	0	3	8	9	6	6	7	2	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-
EW						0	0	0	0	0	3	7	4	6	8	-	-	-	↓
RW						0	0	0	0	2	3	9	7	9	5	2	0	0	4x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-
EW									0	0	0	0	0	3	7	4	6	8	↓
RW						0	0	0	0	2	3	9	6	8	2	7'	9	6	3x

Kontrolle der Dezimalstellen im RW: $Dez_{EW} + Dez_{UW} = Dez_{RW} = 1 + 1 = 2$
Ergebnis im RW = 2 396 827,96

Aufgabe 4.4:

Multiplikationsaufgabe: 4 554,5 x 6 183,78 = 4 554,5 x (10 204,00 – 4 020,22)
= 28 164 026,010

Mit einem vorausschauenden Blick läßt sich ersehen, daß es sogar günstiger ist, den Wert 4554,5 im EW einzustellen, obwohl 6183,78 viel mehr Stellen besitzt. Denn im umgekehrten Fall würden insgesamt 23 Kurbeldrehungen benötigt werden (4+5+5+4+5 = 23), um zum Resultat zu gelangen. Der Faktor 6183,78 läßt sich aber durch insgesamt 17 Kurbeldrehungen im UW erzeugen, womit 6 Kurbeldrehungen gespart werden.

Rechentableau an der Rechenmaschine:
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

						▼		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	4'	0	0
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	3'	9	8
							▼	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	3'	7	8
				▼				
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	2	0	3'	7	8
					▼			
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	1	8	3'	7	8
		▼						
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	1	0	1	8	3'	7	8
			▼					
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	6	1	8	3'	7	8

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW							0	0	0	0	0	4	5	5	4	5	-	-	↑
RW						0	0	0	0	0	1	8	2	1	8	0	0	0	4x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-
EW									0	0	0	0	0	4	5	5	4	5	↓
RW						0	0	0	0	0	1	8	1	2	6	9	1	0	2x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-
EW								0	0	0	0	0	4	5	5	4	5	-	↓
RW						0	0	0	0	0	1	7	2	1	6	0	1	0	2x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW					0	0	0	0	0	4	5	5	4	5	-	-	-	-	↑
RW						0	0	0	0	9	2	8	1	1	6	0	1	0	2x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-
EW						0	0	0	0	0	4	5	5	4	5	-	-	-	↓
RW						0	0	0	0	8	3	7	0	2	6	0	1	0	2x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW			0	0	0	0	0	4	5	5	4	5	-	-	-	-	-	-	↑
RW						0	0	4	6	3	8	2	0	2	6	0	1	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-
EW				0	0	0	0	0	4	5	5	4	5	-	-	-	-	-	↓
RW						0	0	2	8	1	6	4	0	2	6'	0	1	0	4x

Kontrolle der Dezimalstellen im RW: $Dez_{EW} + Dez_{UW} = Dez_{RW} = 1 + 2 = 3$
Ergebnis im RW = 28 164 026,010

5. Das Potenzieren ohne Zwischennotierung

<u>Aufgabe 5.1:</u>

Beispiel „Kubieren“: 124^3 = (124 x 124) x 124 = 15 376 x 124 = 1 906 624

Das mehrfache Multiplizieren mit ein und derselben Zahl (Potenzieren) kann direkt mit der Rechenmaschine ausgeführt werden, ohne daß auch nur ein Zwischenergebnis notiert werden muß. Mit dem angeführten Beispiel wird als erstes die Quadrierung vorgenommen und dann das Resultat Schritt für Schritt in das UW übertragen. Damit ergibt sich eine Multiplikation mit dem eigenen Quadrat, wodurch im RW die Kube erscheint.

<u>Rechentableau an der Rechenmaschine:</u>
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	4
							↓	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	2	4
						↓		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	1	2	4

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	0	0	0	0	0	1	2	4	↑
RW						0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	9	6	4x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW								0	0	0	0	0	0	0	1	2	4	-	↑
RW						0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	9	7	6	2x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW							0	0	0	0	0	0	0	1	2	4	-	-	↑
RW						0	0	0	0	0	0	0	0	1	5	3	7	6	1x

				↓				
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	1	0	1	2	4
					↓			
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	1	5	1	2	4
						↓		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	1	5	3	2	4
							↓	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	1	5	3	7	4
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	1	5	3	7	6

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	0	1	2	4	-	-	-	-	↑
RW						0	0	0	0	0	0	1	2	5	5	3	7	6	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	0	0	1	2	4	-	-	-	↑
RW						0	0	0	0	0	0	1	8	7	5	3	7	6	5x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	0	0	0	1	2	4	-	-	↑
RW						0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	1	7	6	2x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	0	0	0	0	1	2	4	-	↑
RW						0	0	0	0	0	0	1	9	0	6	3	7	6	5x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	0	0	0	0	0	1	2	4	↑
RW						0	0	0	0	0	0	1	9	0	6	6	2	4	2x

Nach der Quadrierung wird das Zwischenergebnis 15 376 im RW in das UW übertragen, ohne dabei die Zählwerke zu löschen. Dabei beginnt man immer mit der höchsten Stelle im RW, d.h., die „1“ an der 5.Stelle wird als allererster Schritt an die 5.Stelle des UW übergeben. Dann folgen der Reihe nach alle anderen Stellen. Das hat den Vorteil, daß im RW stets die Ziffern noch erkennbar sind, die ins UW übertragen werden müssen.

Im RW erscheint letztenendes das Ergebnis 1 906 624.

Nach diesem Verfahren können natürlich auch höhere Potenzen ausgeführt werden. In diesem Fall sind lediglich die Schritte zur Übertragung ins UW mehrfach durchzuführen (z.B. $124^4 = 124^3$ x 124).

Beim Potenzieren mit Exponent 4 würde es aber meistens einfacher erscheinen, wenn nach der Quadrierung das Zwischenergebnis in das EW eingestellt wird. Dann <u>muß</u> sowohl das UW als auch das RW gelöscht werden. Schließlich erfolgt die Multiplikation mit dem Übertragen der EW-Einstellung in das UW, womit eine Quadrierung des Quadrates ausgeführt würde.

6. Die Division

Bei einer Divisonsberechnung liegt ein sogenannter Dividend vor, welcher durch den Divisor geteilt wird und als Resultat den Quotienten ergibt.

Dividend : Divisor = Quotient

Um den Quotient zweier Zahlen zu berechnen, gibt es einmal die Möglichkeit des „Aufaddierens“ und zum anderen das Verfahren der fortschreitenden Subtraktion, mit dem der Dividend allmählich abgebaut wird. Die Abbaudivision hat den Nachteil, daß sowohl Dividend als auch Divisor hintereinander in das EW eingestellt werden müssen. Hingegen muß bei der Aufbaudivision nur der Divisor im EW vorliegen, da der Dividend Schritt für Schritt im RW erzeugt wird. Deshalb soll weiterführend die Methode der Aufbaudivision vorrangig behandelt werden und nur ein einziges mal das Abbauverfahrens exemplarisch gezeigt werden.

<u>Aufgabe 6.1: Aufbaudivision</u>

Divisionsrechnung: 785 : 27 = 29,074 074 ...

Als erstes wird der Divisor 27 im EW rechtsbündig eingestellt.

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
EW									0	0	0	0	0	0	0	0	2	7

Besitzt das RW insgesamt 13 Stellen, dann ließen sich theoretisch 11 Stellen berechnen, wenn sich der Schlitten (Wagen) der Rechenmaschine zwischen den Stellen 1 bis 11 bewegen könnte. Die meisten Sprossenradmaschinen verfügen aber nur über 8 Stellen im UW, um die der Schlitten bewegt werden kann. Deshalb wird der Schlitten auf die Stelle 8 gerückt, um möglichst viele Stellen zu berechnen.
Jetzt beginnt die Aufbaudivision durch das Aufaddieren per Kurbeldrehungen. Am RW muß nun durch sukzessive Addition die Summe 785 (= Dividend) auf den Stellen 9 / 8 / 7 des RW erzeugt werden. Dabei nähert man sich dem Ergebnis anfangs von unten heran. Im folgenden Rechenbeispiel bleiben wir stets unterhalb von 785. Immer nach dem Schritt, bevor die Anzeige im RW größer als 785,0000... werden würde, wird der Schlitten um eine Stelle zurückgestellt. Danach beginnt die gleiche Prozedur, nur um eine Stelle versetzt. Dieses wird solange durchgeführt bis alle Schlittenstellungen bis hin zur Stelle „1“ durchlaufen sind.

<u>Rechentableau an der Rechenmaschine:</u>
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

	▼							
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	0	0	0	0	0	0	0
		▼						
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	9	0	0	0	0	0	0
			▼					
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	9	0	0	0	0	0	0
				▼				
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	9	0	7	0	0	0	0
					▼			
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	9	0	7	4	0	0	0
						▼		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	9	0	7	4	0	0	0
							▼	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	9	0	7	4	0	7	0
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	9'	0	7	4	0	7	4

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW		0	0	0	0	0	0	0	0	2	7	-	-	-	-	-	-	-	↑
RW						0	0	0	0	5	4	0	0	0	0	0	0	0	2x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW			0	0	0	0	0	0	0	0	2	7	-	-	-	-	-	-	↑
RW						0	0	0	0	7	8	3	0	0	0	0	0	0	9x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
EW				0	0	0	0	0	0	0	0	2	7	-	-	-	-	-	
RW						0	0	0	0	7	8	3	0	0	0	0	0	0	0x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW					0	0	0	0	0	0	0	0	2	7	-	-	-	-	↑
RW						0	0	0	0	7	8	4	8	9	0	0	0	0	7x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW						0	0	0	0	0	0	0	0	2	7	-	-	-	↑
RW						0	0	0	0	7	8	4	9	9	8	0	0	0	4x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
EW							0	0	0	0	0	0	0	0	2	7	-	-	
RW						0	0	0	0	7	8	4	9	9	8	0	0	0	0
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW								0	0	0	0	0	0	0	0	2	7	-	↑
RW						0	0	0	0	7	8	4	9	9	9	8	9	0	7x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	0	0	0	0	0	0	2	7	↑
RW						0	0	0	0	7	8	4'	9	9	9	9	9	8	4x

Im UW zeigt sich am Ende das Ergebnis des Quotienten: 29,074074.

Hier stellt sich nun die Frage, wo im UW überhaubt das Komma zu setzen wäre? Dieses kann erneut mit der schon bekannten Dezimalstellen-Gleichung festgestellt werden.

$$Dez_{EW} + Dez_{UW} = Dez_{RW}$$

-> $Dez_{UW} = Dez_{RW} - Dez_{EW}$

im Beispiel: $Dez_{UW} = Dez_{RW} - Dez_{EW} = 6 - 0 = 6$

Das bedeutet, im UW ist zwischen der Stelle „6“ und „7“ das Komma zu setzen.

Wir können an dem Rechentableau sehen, daß an einigen Schlittenstellungen sehr viele Kurbeldrehungen ausgeführt werden mußten (9x bzw. 7x). Dieses läßt sich natürlich auch abkürzen, wenn ersichtlich ist, daß eine zusätzliche Kurbeldrehung, auch wenn diese oberhalb vom Dividend liegt, näher am aufzubauenden Wert liegt. Dann wird im Folgeschritt subtrahiert, um sich dem Dividend von oben her zu nähern.

Dieselbe Aufgabe nochmal in verkürzter Form:

	▼							
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	3	0	0	0	0	0	0	0
		▼						
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	9	0	0	0	0	0	0
			▼					
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	9	1	0	0	0	0	0
				▼				
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	9	0	7	0	0	0	0
					▼			
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	9	0	7	4	0	0	0
						▼		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	9	0	7	4	1	0	0
							▼	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	9	0	7	4	0	7	0
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	9'	0	7	4	0	7	4

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW		0	0	0	0	0	0	0	0	2	7	-	-	-	-	-	-	-	↑
RW						0	0	0	0	8	1	0	0	0	0	0	0	0	3x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-
EW			0	0	0	0	0	0	0	0	2	7	-	-	-	-	-	-	↓
RW						0	0	0	0	7	8	3	0	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW				0	0	0	0	0	0	0	0	2	7	-	-	-	-	-	↑
RW						0	0	0	0	7	8	5	7	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-
EW					0	0	0	0	0	0	0	0	2	7	-	-	-	-	↓
RW						0	0	0	0	7	8	4	8	9	0	0	0	0	3x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW						0	0	0	0	0	0	0	0	2	7	-	-	-	↑
RW						0	0	0	0	7	8	4	9	9	8	0	0	0	4x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW							0	0	0	0	0	0	0	0	2	7	-	-	↑
RW						0	0	0	0	7	8	5	0	0	0	7	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-
EW								0	0	0	0	0	0	0	0	2	7	-	↓
RW						0	0	0	0	7	8	4	9	9	9	8	9	0	3x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	0	0	0	0	0	0	2	7	↑
RW						0	0	0	0	7	8	4'	9	9	9	9	9	8	4x

Statt der eingangs benötigten 33 Kurbelumdrehungen sind nun nur noch 20 Kurbeldrehungen erforderlich, was einer Kurbel-Ersparnis von ungefähr einem Drittel entspricht.

Aufgabe 6.2: Aufbaudivision mit Dezimalstellen beim Dividend/Divisor

Divisionsrechnung: 54,1 : 16,883 = 3,2044067997...

Dezimalstellen im UW: $Dez_{UW} = Dez_{RW} - Dez_{EW} = 10 - 3 = 7$
(siehe Rechentableau auf der nächsten Seite)

Wenn der Divisor wieder rechtsbündig im EW vorliegt und der Schlitten ebenfalls wieder bis zur Stellung „8“ bewegt wird, dann wäre im UW zwischen der Stelle „7“ und „8“ das Komma zu setzen.

Rechentableau an der Rechenmaschine:
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	3	0	0	0	0	0	0	0
		▼						
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	3	2	0	0	0	0	0	0
			▼					
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	3	2	0	0	0	0	0	0
				▼				
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	3	2	0	4	0	0	0	0
					▼			
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	3	2	0	4	4	0	0	0
						▼		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	3	2	0	4	4	1	0	0
							▼	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	3	2	0	4	4	0	7	0
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	3'	2	0	4	4	0	6	8

EW		0	0	0	0	0	1	6	8	8	3	-	-	-	-	-	-	-	↑
RW						0	5	0	6	4	9	0	0	0	0	0	0	0	3x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW			0	0	0	0	0	1	6	8	8	3	-	-	-	-	-	-	↑
RW						0	5	4	0	2	5	6	0	0	0	0	0	0	2x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
EW				0	0	0	0	0	1	6	8	8	3	-	-	-	-	-	
RW						0	5	4	0	2	5	6	0	0	0	0	0	0	0x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW					0	0	0	0	0	1	6	8	8	3	-	-	-	-	↑
RW						0	5	4	0	9	3	1	3	2	0	0	0	0	4x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW						0	0	0	0	0	1	6	8	8	3	-	-	-	↑
RW						0	5	4	0	9	9	8	8	5	2	0	0	0	4x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW							0	0	0	0	0	1	6	8	8	3	-	-	↑
RW						0	5	4	1	0	0	0	5	4	0	3	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-
EW								0	0	0	0	0	1	6	8	8	3	-	↓
RW						0	5	4	1	0	0	0	0	3	3	8	1	0	3x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-
EW									0	0	0	0	0	1	6	8	8	3	↓
RW						0	5	4'	1	0	0	0	0	0	0	0	4	4	2x

Im UW steht das Ergebnis des errechneten Quotienten: 3,2044068
(Im RW zeigt sich als „Resultat“ das Produkt aus UW x EW, also 16,883 x 3,2044068 = 54,1000000044)

Aufgabe 6.3: Abbaudivision mit Dezimalstellen beim Dividend/Divisor

Divisionsrechnung: 298,6 : 77,252 = 3,8652720965...

Rechentableau an der Rechenmaschine:
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

	▼							
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	1	0	0	0	0	0	0	0
LÖSCHEN DES UW								
	▼							
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW -	4	0	0	0	0	0	0	0
		▼						
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW -	3	8	0	0	0	0	0	0
			▼					
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW -	3	8	6	0	0	0	0	0
				▼				
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW -	3	8	6	5	0	0	0	0
					▼			
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW -	3	8	6	5	3	0	0	0
						▼		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW -	3	8	6	5	2	7	0	0
							▼	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW -	3	8	6	5	2	7	2	0
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW -	3'	8	6	5	2	7	2	1

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW		0	0	0	0	2	9	8'	6	0	0	-	-	-	-	-	-	-	↑	
RW						2	9	8'	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1x	
EINSTELLEN DES DIVISOR																				
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW		0	0	0	0	0	7	7'	2	5	2	-	-	-	-	-	-	-	↓	Es wird in den negativen
RW						9	8	9	5	9	2	0	0	0	0	0	0	0	4x	Bereich gedreht
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW			0	0	0	0	0	7	7	2	5	2	-	-	-	-	-	-	↑	
RW						0	0	5	0	4	2	4	0	0	0	0	0	0	2x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW				0	0	0	0	0	7	7	2	5	2	-	-	-	-	-	↓	
RW						0	0	0	4	0	7	2	8	0	0	0	0	0	6x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW					0	0	0	0	0	7	7	2	5	2	-	-	-	-	↓	
RW						0	0	0	0	2	1	0	2	0	0	0	0	0	5x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW						0	0	0	0	0	7	7	2	5	2	-	-	-	↓	Es wird in den negativen
RW						9	9	9	9	9	7	8	4	4	4	0	0	0	3x	Bereich gedreht
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW							0	0	0	0	0	7	7	2	5	2	-	-	↑	
RW						0	0	0	0	0	0	1	6	1	9	6	0	0	3x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW								0	0	0	0	0	7	7	2	5	2	-	↓	
RW						0	0	0	0	0	0	0	0	7	4	5	6	0	2x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW									0	0	0	0	0	7	7'	2	5	2	↓	Es wird in den negativen
RW						9	9	9'	9	9	9	9	9	9	7	3	0	8	1x	Bereich gedreht
				Rest		=	-	0'	0	0	0	0	0	0	2	6	9	2		

Ergebnis im UW: 3,8652721 , wobei $Dez_{UW} = Dez_{RW} - Dez_{EW} = 10 - 3 = 7$.

6.4: Die Wahl der Stellenanzahl für Divisor/Dividend:

Um nicht unnötig großen Aufwand bei den Berechnungen anfallen zu lassen, ist es von Vorteil, sich im Voraus ein paar Gedanken über die Stellenzahl von Divisor und Dividend zu machen. Dieses hängt in erster Linie von der gewünschten Genauigkeit des Resultates ab, welches man zu erreichen wünscht.

1) Stellenanzahl vom Divisor:
   Allgemein kann davon ausgegangen werden, daß die Stellenanzahl um 1 größer sein sollte als die gewünschte Genauigkeit beim späteren Ergebnis. Wenn z.B. das Ergebnis auf 3 Stellen genau sein soll, dann sollte eine Stellenanzahl von 4 beim Divisor ausreichen, sofern überhaupt soviele Stellen beim Divisor vorgegeben sind.

2) Stellenanzahl vom Dividend:
   Hier gilt das gleiche wie beim Divisor. Wenn ein Dividend mit sehr vielen Stellen vorliegt, dann müssen nicht unbedingt alle Stellen im RW erzeugt werden. Es kann aber auch das Problem vorliegen, daß ohnehin nicht alle Stellen in der Anzeige des RW erscheinen können, weil die gewählte Stellenanzahl des Divisors schon sehr groß ist. In unseren Beispielen gehen wir von einer 13-stelligen Anzeige im RW aus, wobei der Schlitten maximal bis zur Stelle 8 bewegt werden kann.

   $$\text{Stellen}_{RW} = \text{Kapazität}_{RW} - \text{Stellen}_{EW} = 13 - \text{Stellen}_{EW}$$

   Wenn der Divisor 6 Stellen besitzt, dann bleiben für den Dividend 7 Stellen übrig. Das bedeutet für das Endergebnis (Quotient), daß dieses ebenfalls auf mindestens 7 Stellen genau sein sollte.
   Wird also eine Genauigkeit von 7 Stellen gefordert, dann sollte die Stellenzahl beim Dividend 7 sein. Daraus resultiert nun eine maximale Stellenanzahl von 6 Stellen für den Divisor. Das bedeutet aber auch, daß wir die Genauigkeit von 7 Stellen überhaupt nicht erfüllen könnten, sofern der Divisor wirklich über eine höhere Stellenanzahl als 6 verfügt. Hier läßt sich also schon ableiten, wie hoch die Genauigkeit maximal ausfallen kann. Stößt man an diese Grenzen, dann müßte eine Rechenmaschine mit einer höheren RW-Kapazität verwendet werden (z.B. 16-stellig).

Aufgabe 6.5: Aufbaudivision mit Dezimalstellen beim Dividend/Divisor

Divisionsrechnung: 53,589 : 189,663 = 0,282548520...

$\text{Stellen}_{RW} = \text{Kapazität}_{RW} - \text{Stellen}_{EW} = 13 - 6 = 7$ -> größer als die 5 Stellen vom Dividend.
$\text{Dez}_{UW} = \text{Dez}_{RW} - \text{Dez}_{EW} = 11 - 3 = 8$

Rechentableau an der Rechenmaschine:
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

	▼							
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	3	0	0	0	0	0	0	0
		▼						
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	8	0	0	0	0	0	0
			▼					
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	8	2	0	0	0	0	0
				▼				
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	8	2	5	0	0	0	0
					▼			
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	8	2	5	5	0	0	0
						▼		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	8	2	5	4	8	0	0
							▼	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	8	2	5	4	8	5	0
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	'2	8	2	5	4	8	5	2

Quotient im UW = 0,28254852

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW		0	0	0	0	1	8	9	6	6	3	-	-	-	-	-	-	-	↑
RW						5	6	8	9	8	9	0	0	0	0	0	0	0	3x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-
EW			0	0	0	0	1	8	9	6	6	3	-	-	-	-	-	-	↓
RW						5	3	1	0	5	6	4	0	0	0	0	0	0	2x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW				0	0	0	0	1	8	9	6	6	3	-	-	-	-	-	↑
RW						5	3	4	8	4	9	6	6	0	0	0	0	0	2x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW					0	0	0	0	1	8	9	6	6	3	-	-	-	-	↑
RW						5	3	5	7	9	7	9	7	5	0	0	0	0	5x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW						0	0	0	0	1	8	9	6	6	3	-	-	-	↑
RW						5	3	5	8	9	2	8	0	6	5	0	0	0	5x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-
EW							0	0	0	0	1	8	9	6	6	3	-	-	↓
RW						5	3	5	8	8	9	0	1	3	2	4	0	0	2x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW								0	0	0	0	1	8	9	6	6	3	-	↑
RW						5	3	5	8	8	9	9	6	1	5	5	5	0	5x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	0	0	1	8	9'	6	6	3	↑
RW						5	3'	5	8	8	9	9	9	9	4	8	7	6	2x

Ergebnis ist auf jeden Fall bis auf 7 Stellen genau.

Nachsatz zu der Abbaudivision (siehe Aufgabe 6.3):

Als Ergänzung wäre noch anzuführen, daß es noch einen weiteren Nachteil gibt außer der zusätzlichen Dividend-Einstellung. Durch das Verfahren der verkürzten Division kommt es gelegentlich vor, daß man in den negativen Bereich des RW dreht. In diesem Moment müssen sämtliche Rädchen des RW über die Kurbel bewegt werden. Wird darauf wieder in den positiven Bereich gedreht, dann sind erneut alle Rädchen zu bewegen. Diese Vorzeichensprünge werden in der Regel durch einen Glockenschlag begleitet. Aus diesem Grunde ist die Aufbaudivision meiner Ansicht nach (Empfehlung) der bessere Weg, allein schon der Übersichtlichkeit wegen, weil Dividend, Divisor und Quotient am Ende des Rechenganges auf der Maschine dokumentiert sind.

7. Die Dreisatzaufgaben

Im täglichen Leben spielen die Dreisatzaufgaben eine große Rolle, wenn es gilt, Verhältnisse miteinander in Beziehung zu setzen.

Aufgabe 7.1: Beispiel eines Dreisatzes
Ein Pkw benötigt für die Autobahnstrecke von 355 km genau 24,6 Liter Normalbenzin. Wieviel Liter Normalbenzin verbraucht der Pkw bei einer Autobahnstrecke von 508 km ?

Lösung: 24,6 Liter : 355 km = X : 508 km -> X = (508 km : 355 km) x 24,6 Liter
X = 35,20225 Liter

Auf einer Rechenmaschine könnte das Ergebnis über 2 Schritte berechnet werden, indem einmal eine Multiplikation und einmal eine Division ausgeführt wird. Es ist aber auch möglich, in einem Schritt beide Operationen durchzuführen, wenn das EW und das RW in zwei Anzeigebereiche getrennt werden. Im EW wird beispielsweise der Divisor „355“ auf der linken Seite und der Multiplikator „24,6“ rechtsbündig eingestellt. Im RW wird dann mittels der Aufbaudivision der Dividend „508“ auf der linken Seite erzeugt, wobei schließlich auf der rechten Seite des RW das Ergebnis „X“ erscheint.

Rechentableau an der Rechenmaschine:
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

					↓			
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	1	0	0	0
						↓		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	1	4	0	0
							↓	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	1	4	3	0
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	1'	4	3	1

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW						3	5	5'	0	0	0	0	2	4'	6	-	-	-	↑
RW						3	5	5'	0	0	0	0	2	4'	6	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW							3	5	5	0	0	0	0	2	4	6	-	-	↑
RW						4	9	7	0	0	0	0	3	4	4	4	0	0	4x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW								3	5	5	0	0	0	0	2	4	6	-	↑
RW						5	0	7	6	5	0	0	3	5	1	7	8	0	3x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									3	5	5	0	0	0	0	2	4	6	↑
RW						5	0	8'	0	0	5	0	3	5'	2	0	2	6	1x

Dezimalstellenanzahl:
Divisor „355“: $Dez_{EW\_1} = 7$
Multiplikator „24,6“: $Dez_{EW\_2} = 1$
Dividend „508“: $Dez_{RW\_1} = 10$

Damit ergibt sich für das UW: $Dez_{UW} = Dez_{RW\_1} - Dez_{EW\_1} = 10 – 7 = 3$

Das bedeutet für das Endergebnis: $Dez_{RW\_2} = Dez_{UW} + Dez_{EW\_2} = 3 + 1 = 4$
$Dez_{RW\_2} = Dez_{RW\_1} - Dez_{EW\_1} + Dez_{EW\_2}$

Im UW steht somit der Quotient 1,431 bzgl. der Division 508 : 355 und im rechten Bereich des RW liegt das Endergebnis 35,2026 vor. Da der Dividend ziemlich gut angenähert worden ist, resultiert sogar eine 5-stellige Genauigkeit beim Endergebnis (erwartungsgemäß 3- bis 4-stellige Genauigkeit).

Es lassen sich auch größere Werte für den Divisor im EW einstellen. In diesem Fall ist aber darauf zu achten, daß die letzten Stellen beim Divisor schrittweise getilgt werden müssen (0 einstellen), damit das Endergebnis auf der rechten Seite nicht überschrieben wird!

<u>Aufgabe 7.2:</u>

Beispiel: X = (235,6 : 73,829) x 12,56 = 40,0809...

<u>Rechentableau an der Rechenmaschine:</u>
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	3	0	0	0
						↓		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	3	2	0	0
							↓	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	3	1	9	0
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	3'	1	9	1

EW						0	7	3'	8	2	9	1	2'	5	6	-	-	-	↑	
RW						2	2	1'	4	8	7	3	7'	6	8	0	0	0	3x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	Elimination einer Stelle
EW							0	7	3	8	3	0	1	2	5	6	-	-	↑	und Aufrunden
RW						2	3	6	2	5	3	4	0	1	9	2	0	0	2x	der nächsten Stelle.
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW								0	7	3	8	0	0	1	2	5	6	-	↓	Elimination einer Stelle
RW						2	3	5	5	1	5	4	0	0	6	6	4	0	1x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	Elimination einer Stelle
EW									0	7	4	0	0	0	1	2	5	6	↑	und Aufrunden
RW						2	3	5'	5	8	9	4	0'	0	7	8	9	6	1x	der nächsten Stelle.

<u>Dezimalstellenanzahl:</u>

Divisor „73,829“: $Dez_{EW\_1} = 7$
Multiplikator „12,56“: $Dez_{EW\_2} = 2$
Dividend „235,6“: $Dez_{RW\_1} = 10$

Damit ergibt sich für das UW: $Dez_{UW} = Dez_{RW\_1} - Dez_{EW\_1} = 10 – 7 = 3$

Das bedeutet für das Endergebnis: $Dez_{RW\_2} = Dez_{UW} + Dez_{EW\_2} = 3 + 2 = 5$
$Dez_{RW\_2} = Dez_{RW\_1} - Dez_{EW\_1} + Dez_{EW\_2}$

Im UW steht der Quotient: 3,191 = 235,6 : 73,829
Im RW steht das Endergebnis: 40,07896 –> aufgerundet 40,08

Der Dividend konnte in diesem Beispiel nicht so gut angenähert wie bei der vorherigen Aufgabe. Hier ergibt sich schon in der 4. Stelle eine Ungenauigkeit, weshalb das Endergebnis auch auf dieser Stelle gerundet werden sollte. Es ist nicht sinnvoll, mit der Angabe weiterer unzuverlässiger Stellen ein genaueres Ergebnis vortäuschen zu wollen.

<u>Aufgabe 7.3:</u>

Beispiel: X = (5003,1 : 225,436) x 5,7 = 126,50007

<u>Dezimalstellenanzahl:</u>

Divisor „225,436“: $Dez_{EW\_1} = 6$
Multiplikator „5,7“: $Dez_{EW\_2} = 1$
Dividend „5003,1“: $Dez_{RW\_1} = 9$

Damit ergibt sich für das UW: $Dez_{UW} = Dez_{RW\_1} - Dez_{EW\_1} = 9 – 6 = 3$

Das bedeutet für das Endergebnis: $Dez_{RW\_2} = Dez_{UW} + Dez_{EW\_2} = 3 + 1 = 4$
$Dez_{RW\_2} = Dez_{RW\_1} - Dez_{EW\_1} + Dez_{EW\_2}$

Rechentableau an der Rechenmaschine:
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

				▼				
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	2	0'	0	0	0
					▼			
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	2	2'	0	0	0
						▼		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	2	2'	2	0	0
							▼	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	2	2'	1	9	0
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	2	2'	1	9	3

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW					0	2	2	5'	4	3	6	0	5'	7	-	-	-	-	↑	
RW						4	5	0	8'	7	2	1	1	4'	0	0	0	0	2x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	Elimination einer Stelle
EW						0	2	2	5	4	4	0	0	5	7	-	-	-	↑	und Aufrunden
RW						4	9	5	9'	6	0	1	2	5'	4	0	0	0	2x	der nächsten Stelle.
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW							0	2	2	5	4	0	0	0	5	7	-	-	↑	Elimination einer Stelle
RW						5	0	0	4'	6	8	1	2	6'	5	4	0	0	2x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW								0	2	2	5	0	0	0	0	5	7	-	↓	Elimination einer Stelle
RW						5	0	0	2'	4	3	1	2	6'	4	8	3	0	1x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	Elimination einer Stelle
EW									0	2	3	0	0	0	0	0	5	7	↑	und Aufrunden
RW						5	0	0	3'	1	2	1	2	6'	5	0	0	1	2x	der nächsten Stelle.

Im UW steht der Quotient: 22,193 = 5003,1 : 225,436
Im RW steht das Endergebnis: 126,5001 –> abgerundet 126,5

8. Das Radizieren (Wurzelziehen)

8.1: Die Quadratwurzel

Beim Wurzelziehen werden Verfahren verwendet, bei denen durch das permanente Ändern der Einstellung im EW eine Annäherung hin zum Radikand (Wert unterm Wurzelzeichen) erfolgt, wobei sich dann im UW das Resultat der Wurzel abbilden soll. Hiermit stellt sich die Frage, nach welchem Schema die sukzessiven Einstellungen erfolgen müssen, damit letztendlich das angenäherte Ergebnis im UW erscheint?

8.1.1: Das Verfahren mit einer arithmetischen Reihe:

Es wird mit dieser Methode die Tatsache angewandt, daß sich jede Quadratzahl als Summe der ungeraden Zahlen darstellen läßt.

$1^2 = 1$
$2^2 = 1 + 3$
$3^2 = 1 + 3 + 5$
$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$

$n^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + (2n - 1)$ -> $n^2 = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1)$ k = 1; 2; 3; .....

Wird im EW schrittweise Reihenglied um Reihenglied aufeinander addiert, dann erscheint im RW stets eine Quadratzahl bzw. im UW steht jedesmal die Anzahl der bisher berücksichtigten Glieder und somit ebenfalls der Wurzelwert des im RW befindlichen Zahlenwertes.

								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	1
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	2
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	3
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	4
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	0	0	5

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	↑	
RW						0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1x	= 1 x 1
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	↑	
RW						0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	1x	= 2 x 2
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	↑	
RW						0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	1x	= 3 x 3
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	↑	
RW						0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	6	1x	= 4 x 4
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	↑	
RW						0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	5	1x	= 5 x 5

Allein nach diesem Rechenschema zu verfahren reicht natürlich nicht aus, um jeden beliebigen Wurzelwert berechnen zu können. Aber vom Prinzip her wird eigentlich nichts anderes gemacht, um sich damit dem Wurzelwert anzunähern.
Dieses geschieht mit Kenntnis der binomischen Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

<u>zur Theorie:</u>
Es soll folgende Wurzel berechnet werden: $x = \sqrt{z}$ bzw. $x^2 = z$

In der ersten Näherung wird eine Quadratzahl x^2_0 gesucht, die im groben z entspricht.

$(x_0 + x'_1)^2 = z$
$x^2_0 + (2x_0 x'_1 + x'^2_1) = z$

Im Moment würde das Ergebnis um den Fehlbetrag x'_1 falsch sein. deshalb muß im nächsten Schritt eine weitere Annäherung an z erfolgen, indem nach einem x_1 gesucht wird und dieses zum x_0 ergänzt wird.

$[(x_0 + x_1) + x'_2]^2 = z$
$(x^2_0 + 2x_0 x_1 + x'^2_1) + (2(x_0 + x_1)x'_2 + x'^2_2) = z$

Dann erfolgt erneut die nächste Annäherung mit der Suche nach x_2 usw...

$[(x_0 + x_1 + x_2) + x'_3]^2 = z$
$(x_0 + x_1 + x_2)^2 + 2(x_0 + x_1 + x_2)x'_3 + x'^2_3 = z$
....
$[(x_0 + x_1 + ... + x_k) + x'_{k+1}]^2 = z$
$(x_0 + x_1 + ... + x_k)^2 + 2(x_0 + x_1 + ... + x_k)x'_{k+1} + x'^2_{k+1} = z$

Je nachdem wie genau das Ergebnis ausfallen soll, kann irgendwann das Restglied vernachlässigt werden und es resultiert $z \approx (x_0 + x_1 + ... + x_k)$.
Nach diesem Rechenschema läßt sich beispielsweise handschriftlich Stelle um Stelle eines Wurzelwertes errechnen. Deshalb sei ein Zahlenbeispiel angegeben, wie eine Wurzel einst „zu Fuß" berechnet wurde, bevor die Schritte per Rechenmaschine erfolgen.

<u>Aufgabe:</u> $\sqrt{1849} = ?$

		x_0 x_1 x_2 x_3 x_4	
√ 18'49	**=**	**4 3, 0 0 0**	
<u>16'</u>	=	$4^2 = 16$	$x_0 = 4$
2'49	=	$(2x40 + x_1)x_1 = x_1 * 80 + x^2_1$	$x_1 = 3$
<u>2'49</u>	=	$80x3 + 3^2 = 249$	
' 00' 00			$x_2 = 0; x_3 = 0; x_4 = 0$

Der Radikand 1849 wird zwecks der Übersichtlichkeit erstmal in Zweiergruppen unterteilt (18' 49' ,00'). Es wird damit begonnen, daß ein Wert x_0 gefunden wird, dessen Quadrat an 18' herankommt, was hier mit 4x4 vorliegt. Danach wird die Differenz zum Radikand gebildet und die nächste Zweiergruppe berücksichtigt. Es ergibt sich eine Differenz von 2' 49. Um die nächste Stelle x_1 zu berechnen, wird der Ausdruck des Restgliedes $(2x_0 x_1 + x^2_1)$ angeführt und ein Wert für x_1 gesucht. Das wäre in unserem Fall $x_1 = 3$. Wieder wird die bestehende Differenz errechnet, die nun aber Null ist. Damit liegt das Ergebnis $43^2 = 1849$ vor.

Da 1849 genau eine Quadratzahl einer Natürlichen Zahl ist, endet das Schema schon nach zwei Schritten. Eine etwas aufwendigere Beispielaufgabe wird noch nachgereicht und „zu Fuß" gerechnet. Aber bevor dieses geschieht, soll die Vorgehensweise auf der Rechenmaschine dargestellt werden. Obwohl auf der Rechenmaschine in gleicher Weise Stelle für Stelle vom Wurzelwert gefunden wird, unterscheidet sich der Vorgang dadurch, daß die Annäherung durch eine arithmetische Reihe erfolgt.

<u>Rechentableau an der Rechenmaschine:</u>
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

			↓					
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	**1**	0	0	0	0	0
			↓					
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	**2**	0	0	0	0	0
			↓					
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	**3**	0	0	0	0	0
			↓					
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	**4**	0	0	0	0	0
				↓				
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	4	**1**	0	0	0	0
				↓				
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	4	**2**	0	0	0	0
				↓				
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	4	**3'**	0	0	0	0

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW				0	0	0	**1'**	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	↑
RW						0	1'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW				0	0	0	**3'**	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	↑
RW						0	4'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW				0	0	0	**5'**	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	↑
RW						0	9'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW				0	0	0	**7'**	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	↑
RW						1	6'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW					0	0	0'	**8**	**1**	0	0	0	0	0	-	-	-	-	↑
RW						1	6'	8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW					0	0	0'	**8**	**3**	0	0	0	0	0	-	-	-	-	↑
RW						1	7'	6	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW					0	0	0'	**8**	**5**	0	0	0	0	0	-	-	-	-	↑
RW						1	8'	4	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1x

In den ersten vier Schritten werden die ungeraden Zahlen von 1 bis 7 addiert. Das ergibt als Summe einmal die Quadratzahl 16 und mit der Anzahl der Schritte (4x) erhalten wir korrespondierend die erste Stelle unserer Annäherung, die im UW sichtbar ist. Der Wagen wird jetzt um eine Stelle zurückbewegt. Da nun eine Stelle im EW hinzukommt bzw. eine Zehnerpotenz ergänzt wird, gilt dieses auch für die arithmetische Reihe, die jetzt 10-fach höhere Glieder betrachtet. Im EW ist der letzte Wert um 1 zu erhöhen und in der nächsten Stelle wird wieder mit 1 begonnen, sodaß im EW der Wert 81 steht. Es folgt die Addition der weiteren Glieder 83 und 85. Da die Summe im RW exakt der Wert vom Radikand ist, endet die Rechnung vorzeitig und es liegt der im UW stehende Wert als Endergebnis vor.

1. Schritt: 16 = 1 + 3 + 5 + 7
   16'00 = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 77 + 79
2. Schritt: 16'00 + 2'49 = (1 + 3 + 5 + 7 + ... + 77 + 79) + (81 + 83 + 85) = 18'49

Theoretisch hätte man die ersten 43 Glieder auf der Rechenmaschine aufaddieren können und wäre auf dasselbe Ergebnis gekommen, was natürlich völlig überflüssig ist, da nur die Additionen auf jeder Zehnerstelle durchgeführt werden müssen, also im ersten Schritt 4 und im zweiten Schritt 3 Additionen.

<u>weitere Beispielaufgabe:</u> $\sqrt{5555} = ?$ (handschriftlich gerechnet)

		x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7	
√ 55'55	**=**	**7 4, 5 3 1 8 6 ...**	
<u>49'</u>	=	$7^2 = 49$	$x_0 = 7$
6' 55	=	$(2x70 + x_1)x_1 = x_1 * 140 + x_1^2$	
<u>5' 76</u>	=	$1'40x4 + 4^2 = 5'76$	$x_1 = 4$
' 79' 00	=	$(2x7'40 + x_2)x_2 = x_2 * 14'80 + x_2^2$	
<u>' 74' 25</u>	=	$14'80x5 + 5^2 = 74'25$	$x_2 = 5$
' 04' 75' 00	=	$(2x74'50 + x_3)x_3 = x_3 * 1'49'00 + x_3^2$	
<u>' 04' 47' 09</u>	=	$1'49'00x3 + 3^2 = 4'47'09$	$x_3 = 3$
' 27' 91' 00	=	$(2x7'45'30 + x_4)x_4 = x_4 * 14'90'60 + x_4^2$	
<u>' 14' 90' 61</u>	=	$14'90'60x1 + 1^2 = 14'90'61$	$x_4 = 1$
' 13' 00' 39' 00	=	$(2x74'53'10 + x_5)x_5 = x_5 * 1'49'06'20 + x_5^2$	
<u>' 11' 92' 50' 24</u>	=	$1'49'06'20x8 + 8^2 = 11'92'50'24$	$x_5 = 8$
' 01' 07' 88' 76' 00	=	$(2x7'45'31'80 + x_6)x_6 = x_6 * 14'90'63'60 + x_6^2$	
<u>' 00' 89' 43' 81' 96</u>	=	$14'90'63'60x6 + 6^2 = 89'43'81'96$	$x_6 = 6$
' 18' 44' 94' 04' 00			
usw.			

<u>Dasselbe Beispiel nun auf der Rechenmaschine:</u>
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht. (siehe nächste Seite)

			↓					
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	1	0	0	0	0	0
			↓					
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	2	0	0	0	0	0
			↓					
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	3	0	0	0	0	0
			↓					
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	4	0	0	0	0	0
			↓					
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	5	0	0	0	0	0
			↓					
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	6	0	0	0	0	0
			↓					
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	7	0	0	0	0	0
				↓				
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	7	1'	0	0	0	0
				↓				
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	7	2'	0	0	0	0
				↓				
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	7	3'	0	0	0	0
				↓				
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	7	4'	0	0	0	0
					↓			
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	7	4	1	0	0	0
					↓			
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	7	4	2	0	0	0
					↓			
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	7	4	3	0	0	0
					↓			
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	7	4	4	0	0	0
					↓			
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	7	4	5	0	0	0
						↓		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	7	4	5	1	0	0
						↓		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	7	4	5	2	0	0
						↓		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	7	4	5	3	0	0
							↓	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	7	4	5	3	1	0
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	7	4	5	3	1	1
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	7	4	5	3	1	2
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	7	4	5	3	1	3
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	7	4	5	3	1	4
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	7	4	5	3	1	5
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	7	4	5	3	1	6
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	7	4	5	3	1	7
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	7	4	5	3	1	8
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	7	4'	5	3	1	9

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW				0	0	0	1	0'	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	↑
RW						0	1	0'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW				0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	↑
RW						0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW				0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	↑
RW						0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW				0	0	0	7	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	↑
RW						1	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW				0	0	0	9	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	↑
RW						2	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW				0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	↑
RW						3	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW				0	0	1	3	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	↑
RW						4	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW					0	0	1	4	1	0	0	0	0	0	-	-	-	-	↑
RW						5	0	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW					0	0	1	4	3	0	0	0	0	0	-	-	-	-	↑
RW						5	1	8	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW					0	0	1	4	5	0	0	0	0	0	-	-	-	-	↑
RW						5	3	2	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW					0	0	1	4	7	0	0	0	0	0	-	-	-	-	↑
RW						5	4	7	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW						0	0	1	4	8	1	0	0	0	0	-	-	-	↑
RW						5	4	9	0	8	1	0	0	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW						0	0	1	4	8	3	0	0	0	0	-	-	-	↑
RW						5	5	0	5	6	4	0	0	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW						0	0	1	4	8	5	0	0	0	0	-	-	-	↑
RW						5	5	2	0	4	9	0	0	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW						0	0	1	4	8	7	0	0	0	0	-	-	-	↑
RW						5	5	3	5	3	6	0	0	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW						0	0	1	4	8	9	0	0	0	0	-	-	-	↑
RW						5	5	5	0	2	5	0	0	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW							0	0	1	4	9	0	1	0	0	0	-	-	↑
RW						5	5	5	1	7	4	0	1	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW							0	0	1	4	9	0	3	0	0	0	-	-	↑
RW						5	5	5	3	2	3	0	4	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW							0	0	1	4	9	0	5	0	0	0	-	-	↑
RW						5	5	5	4	7	2	0	9	0	0	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW								0	0	1	4	9	0	6	1	0	0	-	↑
RW						5	5	5	4	8	6	9	9	6	1	0	0	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	1	4	9	0	6	2	1	0	↑
RW						5	5	5	4	8	8	4	8	6	7	2	1	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	1	4	9	0	6	2	3	0	↑
RW						5	5	5	4	8	9	9	7	7	3	4	4	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	1	4	9	0	6	2	5	0	↑
RW						5	5	5	4	9	1	4	6	7	9	6	9	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	1	4	9	0	6	2	7	0	↑
RW						5	5	5	4	9	2	9	5	8	5	9	6	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	1	4	9	0	6	2	9	0	↑
RW						5	5	5	4	9	4	4	4	9	2	2	5	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	1	4	9	0	6	3	1	0	↑
RW						5	5	5	4	9	5	9	3	9	8	5	6	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	1	4	9	0	6	3	3	0	↑
RW						5	5	5	4	9	7	4	3	0	4	8	9	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	1	4	9	0	6	3	5	0	↑
RW						5	5	5	4	9	8	9	2	1	1	2	4	0	1x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	1	4	9'	0	6	3	7	0	↑
RW						5	5	5	5'	0	0	4	1	1	7	6	1	0	1x

Beschreibung der Vorgehensweise an der Rechenmaschine:

1) Damit ein Ergebnis von mindestens 6 Stellen berechnet werden kann, muß der Wagen auf die Stellung 6 bewegt werden.
2) Im EW wird an der 7. Stelle die Addition mit 1 begonnen. Dann wird dort die 3 eingestellt und addiert usw. Nachdem der Wert 13 addiert worden ist, müßte im RW die Quadratzahl 49 sichtbar sein und im UW die 7 stehen. Das entspricht genau der ersten Näherung x_0 aus der handschriftlichen Rechnung, in der die Subtraktion von 49'00 durchgeführt worden ist.
3) Der Wagen ist jetzt auf die Stellung 5 zu setzen. Der Wert 13 im EW wird um 1 erhöht (entspricht stets dem doppelten Wert aus dem UW) und in der nächstniedrigen Stelle wird die 1 eingestellt, sodaß eine Addition der Zahlenfolge 141 vorliegt.
4) Es folgen wieder weitere Additionen, wobei die nächsten Reihenglieder 143, 145, und 147 sind. Als Ergebnis im RW liegt nunmehr die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis 147 vor, also $5476 = 74^2$. Der Wurzelwert dieser Zwischensumme liegt im UW vor und lautet 74.
5) Der Wagen wird auf die Stellung 4 bewegt und im EW der Wert 147 um 1 erhöht, sodaß wieder die Verdoppelung des UW-Wertes vorliegt. In der nächstniedrigen Stelle im RW wird die 1 gesetzt und die Addition kann von Neuem beginnen mit den Gliedern 1481, 1483, 1485, 1487 und 1489.
6) Im RW sehen wir jetzt die Zwischensumme 55'50'25, die als Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis 1489 gebildet wird und dem Quadrat von 745 entspricht (siehe Anzeige im UW).
7) Der Wagen wird erneut um eine Stelle verrückt hin zur Stellung 3. Danach folgen dieselben Prozeduren wie schon oben erwähnt. ...

Als Ergebnis kommt am UW 74,5319 heraus, wobei im RW genau das Quadrat von diesem Wert abgebildet wird. Damit kann man zwischenzeitlich ersehen, wie weit die Annäherung schon erfolgt ist. Bei einer Rechenmaschine mit der Zählwerk-Kapazität [10 x 13 x 8] = [EW x RW x UW] läßt sich somit ein 6-stelliges Resultat berechnen, also zumindestens eine 5-stellige Genauigkeit erbringen. Daher ist es angebracht, wenn anfänglich im EW die erste Addition mit „1“ an der Stelle 7 erfolgt und der Wagen auf der Position 6 steht. Dadurch können insgesamt 6 Stellen im UW erzeugt werden, was in der Regel auch ausreicht.

Frage: An welcher Stelle ist das Komma im EW bzw. UW zu setzen?

Damit wir abschließend beim Endresultat im UW das Komma richtig setzen können, wird vorausgesetzt, daß wir die Kenntnis über die Kommastellung im EW besitzen. Hier kommt einem das anfängliche Strukturieren des Radikanden in Zweiergruppen zugute. Denn die Anzahl der Zweiergruppen vor dem Komma ist genau die Anzahl der Stellen, nach dem das Komma im EW folgen müßte.

Beispiel:	Der Radikand sei:	x x x , x x x x
	somit ist die Zweiergruppengliederung:	0 x' x x', x x' x x'

In diesem Fall liegen 2 Zweiergruppen vor dem Komma vor, ergo ist nach der zweiten Stelle im UW ein Komma zu setzen. [siehe auch das Beispiel mit dem Radikand 5555]

Kommastellenanzahl für das Resultat:
Damit ergibt sich für das UW: $Dez_{UW} = Dez_{RW} - Dez_{EW} = 9 – 5 = 4$

8.1.2: Das Verfahren mit einem angenäherten (abgeschätzten) Ausgangswert:

Mit der jetzt folgenden Methode läßt sich auf einem etwas schnelleren Wege ein angenäherter Wurzelwert errechnen, sofern ein einigermaßen guter Wert für die Wurzel vorausgesetzt (abgeschätzt) worden ist. Der Unterschied bei diesem Verfahren ist, daß mit der vorangegangenen Methode die Genauigkeit immer stärker zunahm, je mehr Stellen errechnet worden sind. Das hier angesprochene Verfahren aber hängt stark von dem Ausgangswert ab. Ist dieser nur sehr grob abgeschätz, dann konvergiert das Ergebnis entsprechend ungenau. Aber auf jeden Fall ist das Ergebnis eine bessere Annäherung als der Ausgangswert. D.h., wenn die erste Abschätzung zu ungenau sein sollte, dann wird das Verfahren eben ein weiteres mal ausgeführt, und zwar mit dem Ergebnis der ersten Annäherung (Iterations-Verfahren).

<u>Das Verfahren:</u> Beispielaufgabe: $\sqrt{532} = ?$

1) Die Wurzel aus 532 wird ungefähr abgeschätzt. Der geübte Kopfrechner kann hierbei insofern profitieren, wenn er die ersten 32 Quadratzahlen auswendig kennt. Hier ergäbe sich für $24^2 = 576$ und für $23^2 = 529$. Schätzen wir also die Wurzel ungefähr mit 23,0 ab. Wir könnten auch einen Rechenschieber zur Hand nehmen und einen Wert ablesen, der auf einen Ablesewert zwischen 23,0 und 23,1 hinweist.
2) Auf der Rechenmaschine wird nun dieser Wert quadriert: 23,0 x 23,0 = 529,0.
3) Jetzt erfolgt das Umstellen des EW, indem der doppelte Wert aus dem UW eingestellt wird, also 46,0. Der Wagen ist auf die nächstfolgende Stellung zu bewegen und nun wird genauso wie bei der Divisionsrechnung der Wert im RW aufgebaut in Richtung des gewünschten Radikanden 532.
4) Danach wird der Wagen wieder um eine Stelle eingerückt, im EW wird ebenfalls wieder das Doppelte vom UW übernommen, und die analoge Prozedur zur Annäherung an 532 vorgenommen usw.
5) Im UW erscheinen mit jeder Wagenverrückung weitere Stelle des angenäherten Wurzelwertes.

<u>Rechentableau an der Rechenmaschine:</u>
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

	▼							
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	0'	0	0	0	0	0	0
		▼						
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	3'	0	0	0	0	0	0
			▼					
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	3'	0	0	0	0	0	0
				▼				
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	3'	0	6	0	0	0	0
					▼			
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	3'	0	6	5	0	0	0
						▼		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	3'	0	6	5	2	0	0
							▼	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	3'	0	6	5	2	0	0
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	2	3'	0	6	5	2	0	4

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW		0	0	0	0	2	3'	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	↑
RW						4	6'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW			0	0	0	0	2	3	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	↑
RW						5	2	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
EW				0	0	0	0	4	6	0	0	0	0	-	-	-	-	-	↑
RW						5	2	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW					0	0	0	0	4	6	0	0	0	0	-	-	-	-	↑
RW						5	3	1	7	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW						0	0	0	0	4	6	1	2	0	0	-	-	-	↑
RW						5	3	1	9	9	0	6	0	0	0	0	0	0	5x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW							0	0	0	0	4	6	1	3	0	0	-	-	↑
RW						5	3	1	9	9	9	8	2	6	0	0	0	0	2x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
EW								0	0	0	0	4	6	1	3	0	4	-	↑
RW						5	3	1	9	9	9	8	2	6	0	0	0	0	0x
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
EW									0	0	0	0	4	6'	1	3	0	4	↑
RW						5	3	2'	0	0	0	0	1	0	5	2	1	6	4x

Beginn des Näherungsverfahrens

Im UW steht das angenäherte Ergebnis 23,065204. ($\sqrt{532} = 23{,}065125189...$)
Das Resultat ist also bis auf die 5 .Stelle genau geworden.

<u>zur Theorie dieser Methode:</u>
Es soll folgende Wurzel berechnet werden: $x = \sqrt{z}$ bzw. $x^2 = z$

In der ersten Näherung wird eine Quadratzahl x^2_0 gesucht, die im groben z entspricht.

$(x_0 + x_1)^2 = z$
$x^2_0 + (2x_0 x_1 + x^2_1) = z$

Wenn wir annehmen, daß x^2_1 nur sehr klein ist, dann ergibt sich angenähert:

$x^2_0 + 2x_0 x_1 \approx z$ also ein Restglied (Differenz zum Radikand) von $2x_0 x_1$.

Dieses Restglied wird nun durch den doppelten Anfangswert geteilt ($2x_0$), womit sich x_1 ergibt und welches dann dem Anfangswert x_0 hinzuaddiert wird. Bei den Schritten der fortlaufenden Division wird immer wieder der doppelte Zwischenwert als Divisor im EW eingestellt und der gewünschte Wert vom Dividend im RW (gleich Radikand z) angestrebt.

Als möglicher Fehler ist das anfänglich unterm Teppich gekehrte Restglied x^2_1 aufzufassen. Der Fehler bei der ersten Näherung liegt demnach bei etwa:

$(z - x^2_0) : (2x_0) = x_1 + (x^2_1) : (2x_0)$ -> Fehler ist also ungefähr: $\Delta \approx (x^2_1) : (2x_0)$

In unserem Beispiel käme heraus: $\Delta \approx (x^2_1) : (2x_0) = 0{,}0652^2 : (2x\ 23{,}0) = 0{,}0000924$

Der wirkliche Fehlerbetrag ist: | 23,065125... - 23,065204 | = 0,000079 und ist damit sogar kleiner als Δ .

Darüber kann nun das an der Rechenmaschine erzeugte Ergebnis von der Genauigkeit her bewertet werden. Die Richtigkeit kann max. bis auf die 4 Stelle nach dem Komma gewährleistet werden.
D.h., $\sqrt{532} \approx 23{,}0652$.

<u>Weitere Beispielaufgabe:</u> $\sqrt{0{,}2773} = ?$

$\sqrt{0{,}2773} = \sqrt{2773} \times \sqrt{10^{-4}} = \sqrt{2773} \times 10^{-2} = 52{,}65928218...$

Als erstes wird z.B. per Rechenschieber eine Abschätzung des Wurzelwertes vorgenommen. Auf der Skala läßt sich $52{,}6 \times 10^{-2}$ ablesen. Auf der Rechenmaschine werden die Zehnerpotenzen erstmal nicht betrachtet. Deshalb wird im EW 52,6 eingestellt und im RW der Radikand 2773 angenähert.

<u>Rechentableau an der Rechenmaschine:</u>
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

		▼						
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	5	0'	0	0	0	0	0
			▼					
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	5	3	0	0	0	0	0
				▼				
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	5	2	6	0	0	0	0
					▼			
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	5	2	6	6	0	0	0
						▼		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	5	2	6	5	9	0	0
							▼	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	5	2	6	5	9	3	0
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	5	2'	6	5	9	3	2

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW			0	0	0	0	5	2'	6	0	0	0	-	-	-	-	-	-	↑	
RW						2	6	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW				0	0	0	0	5	2	6	0	0	0	-	-	-	-	-	↑	
RW						2	7	8	7	8	0	0	0	0	0	0	0	0	3x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW					0	0	0	0	5	2	6	0	0	0	-	-	-	-	↓	
RW						2	7	6	6	7	6	0	0	0	0	0	0	0	4x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	Beginn des
EW						0	0	0	1	0	5	2	0	0	0	-	-	-	↑	Näherungs-
RW						2	7	7	3	0	7	2	0	0	0	0	0	0	6x	verfahrens
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW							0	0	0	1	0	5	3	2	0	0	-	-	↓	
RW						2	7	7	2	9	6	6	6	8	0	0	0	0	1x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW								0	0	0	1	0	5	3	1	8	0	-	↑	
RW						2	7	7	2	9	9	8	2	7	5	4	0	0	3x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	0	0	1	0	5'	3	1	8	6	↑	
RW						2	7	7	3'	0	0	0	3	8	1	7	7	2	2x	

Es ergibt sich also im UW: 52,65932 als ungefährer Wurzelwert von 2773

Überschlagrechnung der Genauigkeit des Resultates: $\Delta \approx (x^2_1) : (2x_0)$
$\Delta \approx 0{,}05932^2 : (2x\ 52{,}6) = 0{,}0000334$

Demnach ist es ausreichend, nicht mehr als 4 Stellen hinter dem Komma anzugeben, da in der 5. Stelle schon ein Fehler zu erwarten ist.

$\sqrt{0{,}2773} \approx 52{,}6593 \times 10^{-2}$

Die wirkliche Abweichung vom richtigen Ergebnis wäre:

| 52,65928... - 52,65932 | = 0,00004 , diesmal etwas größer als das errechnete Δ .

8.2: Die Kubikwurzel

Bei der Kubikwurzelrechnung wird nach der gleichen Strategie verfahren, wie es unter Punkt 8.1.2 bei der Quadratwurzel behandelt wurde. Es wird eingangs ein abgeschätzter Wert für die Kubikwurzel genommen und dann ein verbesserter Näherungswert berechnet. Mit dem Rechengang für die Kubikwurzeln stoßen wir auf ein etwas komplexeres Schema, welches das Notieren eines bestimmten Zwischenergebnisses erforderlich macht. Anhand der folgenden theoretischen Vorgehensweise soll der Näherungswert berechnet werden.

$x = \sqrt[3]{z}$ bzw. $x^3 = z$

In der ersten Näherung wird eine Kubikzahl x^3_0 gesucht, die im groben z entspricht.

$(x_0 + x_1)^3 = z$

$x^3_0 + 3x^2_0 x_1 + 3x_0 x^2_1 + x^3_1 = z$, dabei werden die beiden Restterme erstmal vernachlässigt.

$x^3_0 + 3x^2_0 x'_1 \approx z$

Dadurch läßt sich das x'_1 mittels der Division berechnen:

$x'_1 = (z - x^3_0) : (3x^2_0)$

Damit liegt ein Ergebnis $(x_0 + x'_1)$ vor, welches das Restglied $3x_0 x^2_1 + x^3_1$ noch nicht berücksichtigt hat.

$3x^2_0 x'_1 = 3x^2_0 x_1 + 3x_0 x^2_1 + x^3_1$ / es wird durch $3x^2_0$ dividiert

$x'_1 = x_1 + (x^2_1) : x_0 + (x^3_1) : (3x^2_0)$ / der letzte Term wird vernachlässigt, wegen $x^3_1 << x^2_0$

$x'_1 \approx x_1 + (x^2_1) : x_0 \approx x_1 + (x'^2_1) : x_0$

Das bedeutet, daß die Berechnung von x'_1 in Wirklichkeit etwas zu groß ausgefallen ist, nämlich um die Differenz $(x'^2_1) : x_0$. Hiermit resultiert dann die verbesserte Annäherung mit:

$\mathbf{(x_0 + x'_1) - (x'^2_1) : x_0 \approx \sqrt[3]{z}} < (x_0 + x'_1)$

Auf der Rechenmaschine gilt es jetzt, diese Näherungsformel anzuwenden.

8.2.1: Kubikwurzelrechnung mit Zwischennotierung

Aufgabe: $\sqrt[3]{881} = ?$

Über einen Rechenschieber kann wieder einmal die erste Näherung der Kubikwurzel erfolgen.

$x_0 = 9{,}6$ (ungefähr von der Skala des Rechenschiebers abgelesen)

Dieser Wert wird auf der Rechenmaschine erstmal quadriert, dann ins EW übernommen und anschließend mit 3 multipliziert, wobei das Zwischenergebnis notiert wird.

$x^2_0 = 92{,}16$ -> ins EW
$3x^2_0 = 276{,}48$ -> dieser Wert wird notiert

Es wird das Kubieren von 9,6 durchgeführt und das Zwischenergebnis 276,48 ins EW übernommen.

$x^3_0 = 884{,}736$ und 276,48 ins EW übernehmen

Im RW liegt die Kube von 9,6 vor, also der Wert 884,736 , welcher nun durch die Aufbaudivision auf den Wert von z = 881 gebracht werden soll. Dabei verändert sich der im UW stehende Wert 9,6 in Richtung einer Näherungslösung für die Kubikwurzel.

Aufbaudivision: $x'_1 = (z - x^3_0) : (3x^2_0) = (881 – 884{,}736) : (276{,}48) = - 0{,}01351$

daraus resultiert: -> $x_0 + x'_1 = 9{,}58649 \quad > \sqrt[3]{881}$

Abschließend ist dann noch die verbesserte Näherungslösung zu berechnen:

$(x_0 + x'_1) - (x'^2_1) : x_0 \approx \sqrt[3]{z}$

9,58649 – 0,01351² : 9,6 = **9,58647 ≈ $\sqrt[3]{z}$**

Wird die Kubikwurzel mit einem Taschenrechner ausgeführt, dann erhält man: $\sqrt[3]{881}$ = 9,586468203...
Demnach liegt eine sehr gute Approximation einer Kubikwurzel vor!

Rechentableau an der Rechenmaschine:
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

		▼								18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW			0	0	0	9'	6	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	↑	
UW	0	1	0'	0	0	0	0	0	RW						9	6'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1x	
				▼						18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW					0	0	0	9'	6	0	0	0	0	0	-	-	-	-	↓	UW und RW
UW	0	0	9'	6	0	0	0	0	RW						9	2'	1	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4x	werden gelöscht!
		▼								18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW			0	0	0	0	9	2'	1	6	0	0	-	-	-	-	-	-	↑	Wert 276,48 wird notiert
UW	0	3'	0	0	0	0	0	0	RW						2	7	6'	4	8	0	0	0	0	0	0	0	0	3x	
		▼								18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW			0	0	0	0	9	2'	1	6	0	0	-	-	-	-	-	-	↑	
UW	0	9'	0	0	0	0	0	0	RW						8	2	9'	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0	6x	
			▼							18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW				0	0	0	0	9	2'	1	6	0	0	-	-	-	-	-	↑	notierter Wert 276,48
UW	0	9'	6	0	0	0	0	0	RW						8	8	4'	7	3	6	0	0	0	0	0	0	0	6x	wird im EW eingestellt
				▼						18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	ab hier beginnt die
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW					0	0	0	2	7	6'	4	8	0	0	-	-	-	-	↓	Aufbaudivision bzgl.
UW	0	9'	5	9	0	0	0	0	RW						8	8	1'	9	7	1	2	0	0	0	0	0	0	1x	„881“
					▼					18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW						0	0	0	2	7	6'	4	8	0	0	-	-	-	↓	
UW	0	9'	5	8	6	0	0	0	RW						8	8	0'	8	6	5	2	8	0	0	0	0	0	4x	
						▼				18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW							0	0	0	2	7	6'	4	8	0	0	-	-	↑	
UW	0	9'	5	8	6	5	0	0	RW						8	8	1'	0	0	3	5	2	0	0	0	0	0	5x	
							▼			18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW								0	0	0	2	7	6'	4	8	0	0	-	↓	
UW	0	9'	5	8	6	4	9	0	RW						8	8	1'	0	0	0	7	5	5	2	0	0	0	1x	
								▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	0	2	7	6'	4	8	0	0	↓	
UW	0	9'	5	8	6	4	8	7	RW						8	8	0'	9	9	9	9	2	5	7	6	0	0	3x	

Im UW erscheint das Ergebnis 9,586487. Dieses läßt sich noch um einen kleinen Betrag verbessern, wenn $(x'^2_1) : x_0$ subtrahiert wird.

9,586487 – (9,6 – 9,586487)² : 9,6 = 9,586487 – 0,000019 = **9,586468 ≈ $\sqrt[3]{881}$**

Damit ist ein tadelloses Ergebnis bis auf die 6. Stelle hinterm Komma gelungen!

8.3: Die höheren Wurzeln: $\sqrt[n]{z}$

Die Betrachtungen, die bei der Kubikwurzelrechnung angestellt wurden, können auch auf höhere Wurzeln übertragen werden. Es ist mit einem gut angenäherten Startwert zu beginnen, welcher im ersten Schritt verbessert wird und dann nachträglich noch eine Korrektur (Feinabstimmung) erfährt. Hier der theoretische Abriss im Folgenden:

$x = \sqrt[n]{z}$ bzw. $x^n = z$

In der ersten Näherung wird eine Potenz x^n_0 gesucht, die im groben z entspricht.

$(x_0 + x_1)^n = z$

$x_0^n + nx_0^{n-1} x_1 + ½\, n(n-1)x_0^{n-2}x^2_1 + ... = z$, Restterme werden vernachlässigt, sodaß

$x_0^n + nx_0^{n-1} x'_1 \approx z$

Dadurch läßt sich das x'_1 mittels der Division berechnen:

$x'_1 = (z - x_0^n) : (nx_0^{n-1})$

Damit liegt ein Ergebnis $(x_0 + x'_1)$ vor, welches das Restglied $½\, n(n-1)x_0^{n-2}x^2_1$ noch nicht berücksichtigt hat.

$nx_0^{n-1}x'_1 \approx nx_0^{n-1} x_1 + ½\, n(n-1)x_0^{n-2}x^2_1$ / es wird durch nx_0^{n-1} dividiert

$x'_1 \approx x_1 + (½\, n(n-1)x_0^{n-2}x^2_1) : (nx_0^{n-1})$

$x'_1 \approx x_1 + [(½\, (n-1)x^2_1)] : x_0$

Das bedeutet, daß die Berechnung von x'_1 in Wirklichkeit etwas zu groß ausgefallen ist, nämlich um die Differenz $[(½\, (n-1)x'^2_1)] : x_0$. Hiermit resultiert dann die verbesserte Annäherung mit:

$(x_0 + x'_1) - [(½\, (n-1)x'^2_1)] : x_0 \approx \sqrt[n]{z}$ $< (x_0 + x'_1)$

<u>8.3.1: Beispielaufgabe:</u> $\sqrt[5]{294{,}5} = ?$

Der Startwert soll wieder über einen Rechenschieber ermittelt werden. Dazu lesen wir erstmal den Logarithmus zur Basis 10 von 2,945 x 10² ab. Dieser Wert wird durch den Wurzelexponent 5 dividiert und dann auf dem Rechenschieber die Umkehrung der Logarithmierung durchgeführt:

1) ${}_{10}\log(294{,}5) \approx 2{,}47$ abgelesen vom Rechenschieber

2) $2{,}47 : 5 = 0{,}494$ (läßt sich durchaus im Kopf berechnen: 2,47 = 5x 0,5 – 5x 0,06)

3) $10^{0{,}494} \approx 3{,}12$ abgelesen vom Rechenschieber

Wir beginnen mit $x_0 = 3{,}12$.

$x_0^5 = 295{,}647$ und $x_0^4 = 94{,}759$

$x'_1 = (z - x_0^n) : (nx_0^{n-1}) = (294{,}5 – 295{,}647) : (5x\ 94{,}759) = - 0{,}000242$

Erste Näherung: $(x_0 + x'_1) = 3{,}12 - 0{,}00242 = 3{,}11758$

Zweite Näherung: $(x_0 + x'_1) - [(\frac{1}{2}\,(n-1) x'^{2}_{1})] : x_0$

$$3{,}11758 - (2x\ 0{,}00242^2) : 3{,}12 = \underline{\mathbf{3{,}117576}} \approx \sqrt[5]{\mathbf{294{,}5}}$$

Die Wurzelrechnung auf einem Taschenrechner ergibt: $\sqrt[5]{294{,}5} = 3{,}117576074...$

Die Näherungsformel liefert wieder einen sehr zuverlässigen Wert auf 7 Stellen genau!

<u>Rechentableau an der Rechenmaschine:</u> (Startwert hier $x_0 = 3{,}1$)

Wie unter Punkt 5. „Potenzieren ohne Zwischennotierung“ beschrieben werden die folgenden Potenzen berechnet:

$3{,}1^2 = 9{,}61$
$3{,}1^3 = 29{,}791$
$3{,}1^4 = 92{,}35(21)$ sowie $5x\ 3{,}1^4 = 461{,}76(05)$ Diese Werte werden notiert!
$3{,}1^5 = 286{,}29(151)$

Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht und der notierte Wert von $3{,}1^4 = 92{,}35$ im EW eingestellt.

		↓						
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	3'	0	0	0	0	0	0
			↓					
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	3'	1	0	0	0	0	0
				↓				
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	3'	1	2	0	0	0	0
					↓			
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	3'	1	1	8	0	0	0
						↓		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	3'	1	1	7	8	0	0
							↓	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	3'	1	1	7	7	9	0
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	3'	1	1	7	7	9	1

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW			0	0	0	0	9	2'	3	5	0	0	-	-	-	-	-	-	↑	
RW						2	7	7'	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	3x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW				0	0	0	0	9	2	3	5	0	0	-	-	-	-	-	↑	notierter Wert 461,76
RW						2	8	6	2	8	5	0	0	0	0	0	0	0	1x	wird im EW eingestellt
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	ab hier beginnt die
EW					0	0	0	4	6	1'	7	6	0	0	-	-	-	-	↑	Aufbaudivision bzgl.
RW						2	9	5	5	2	0	2	0	0	0	0	0	0	2x	„294,5“
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW						0	0	0	4	6	1	7	6	0	0	-	-	-	↓	
RW						2	9	4	5	9	6	6	8	0	0	0	0	0	2x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW							0	0	0	4	6	1	7	6	0	0	-	-	↓	
RW						2	9	4	5	0	4	3	2	8	0	0	0	0	2x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW								0	0	0	4	6	1	7	6	0	0	-	↓	
RW						2	9	4	4	9	9	7	1	0	4	0	0	0	1x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	0	0	4	6	1'	7	6	0	0	↑	
RW						2	9	4'	5	0	0	1	7	2	1	6	0	0	1x	

Im UW erscheint das Ergebnis 3,117791. Dieses läßt sich noch um einen kleinen Betrag verbessern, wenn $(2x'^{2}_{1}) : x_0$ subtrahiert wird.

$$3{,}117791 - 2x\ (3{,}1 - 3{,}117791)^2 : 3{,}1 = 9{,}117791 - 0{,}000204 = \mathbf{3{,}117586} \approx \sqrt[5]{\mathbf{294{,}5}}$$

Diesmal stimmt das Ergebnis bis auf die 5. Stelle nach dem Komma. Mit Rücksicht auf den nur zweistelligen Startwert 3,1 ist das Endresultat sehr zufriedenstellend.

<u>Nebenbei bemerkt:</u>
In der Praxis bzw. in den alltäglichen Berechnungen der Technik , des Ingenieurwesens und der Physik wird einem nur selten der Fall über den Weg laufen, daß eine 5. Wurzel berechnet werden muß. Dieses wäre beispielsweise im Bereich der Strahlungphysik möglich, wo bei dem Planck'schen Strahlungsgesetz die Wellenlänge λ in der 5. Potenz vorliegt.

9. Die Berechnung von Polynomen

9.1 Polynome mit ganzzahligen Variablen

Im allgemeinen lassen sich Polynome der Form $y = k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + ... + k_1 x + k_0$ auf die Weise berechnen, indem nacheinander alle benötigten Potenzen des x-Wertes durchgerechnet werden, diese mit den entsprechenden Koeffizienten multipliziert und dann addiert bzw. subtrahiert werden. Handelt es sich um ganzzahlige x-Werte, dann kann auf der Rechenmaschine das bekannte Horner-Schema angewandt werden, wobei der wesentliche Vorteil darin besteht, daß keine Notierungen von Zwischenergebnissen erforderlich sind, da diese sofort in den Zählwerken verarbeitet werden.

9.1.1 Das Horner-Schema

Anhand des folgenden Beispiels soll das Horner-Schema vorgestellt werden: (Polynom 4. Grades)

$$y = k_4 x^4 + k_3 x^3 + k_2 x^2 + k_1 x + k_0$$

-> $$y = \Big(\big(((k_4 x + k_3)x + k_3)x + k_2\big)x + k_1\Big)x + k_0$$

Die Schrittfolgen sind also:

Startvariable:	x	/ Multiplikation mit k_4
		/ Addition von k_3
		/ Multiplikation mit x
		/ Addition von k_2
		/ Multiplikation mit x
		/ Addition von k_1
		/ Multiplikation mit x
		/ Addition von k_0
	... = y	

9.1.2. Aufgabe: $\mathbf{y = 0{,}445\, x^3 - 0{,}31\, x^2 + 2{,}75\, x + 6{,}884}$

Es soll das Polynom für den x-Wert = 7 berechnet werden: **x = 7**

->	7 x 0,445	= 3,115	
->	3,115 – 0,31	= 2,805	
->	7 x 2,805	= 19,635	
->	19,635 + 2,75	= 22,385	
->	7 x 22,385	= 156,695	
->	156,695 + 6,884	= 163,579	$\mathbf{y_{(x = 7)} = 163{,}579}$

Um auf der Rechenmaschine das Polynom für x = 7 ohne Zwischennotierung berechnen zu können, wird das Einstellwerk EW wieder in einen linken und rechten Bereich unterteilt. Die Multiplikation mit dem x-Wert erfolgt in zwei Schritten, wobei dem im RW befindlichen Wert der (x-1)-fache Wert von sich selbst hinzuaddiert wird. Deshalb muß im linken Bereich des EW der Multiplikator 6 (statt 7) hinterlegt werden.

RW x 7 = RW + (7-1)x RW = RW + 6x RW

Auf der rechten Seite im EW werden hingegen bei jeder zweiten Operation die Koeffizienten eingestellt und je nach Vorzeichen ins Zwischenergebnis des RW übertragen. Dann ist das UW zu löschen und der gegenwärtige Wert des RW ins UW zu übertragen, wodurch die Multiplikation mit dem linken EW-Wert 6 erfolgt und zu dem RW-Wert addiert wird. Das Prinzip, welches später auf der Rechenmaschine anzuwenden ist, soll nun auf der nächsten Seite dargestellt werden.

1. Schritt: Ins RW wird der Koeffizient 0,445 übertragen -> **0,445**
2. Schritt: 0,445 wird mit 6 multipliziert und ins RW addiert -> 6x 0,445 + 0,445 = **3,115**
3. Schritt: Ins RW wird der Koeffizient -0,31 übertragen -> 3,115 – 0,31 = **2,805**
4. Schritt: 2,805 wird mit 6 multipliziert und ins RW addiert -> 6x 2,805 + 2,805 = **19,635**
5. Schritt: Ins RW wird der Koeffizient 2,75 übertragen -> 19,635 + 2,75 = **22,385**
6. Schritt: 22,385 wird mit 6 multipliziert und ins RW addiert -> 6x22,385+22,385 = **156,695**
7. Schritt: Ins RW wird der Koeffizient 6,884 übertragen -> 156,385+6,884 = **163,579**

Als Endergebnis liegt der Wert 163,579 im RW vor.

<u>Rechentableau an der Rechenmaschine:</u>
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

		↓								18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW			0	0	6'	0	0	0'	4	4	5	0	-	-	-	-	-	-	↑	Koeffizient
UW	0	1	0	0	0'	0	0	0	RW						0	0	0'	4	4	5	0	0	0	0	0	0	0	1x	0,445 ins EW
UW löschen						↓				18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW							0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	-	-	↑	Wert 0,445 wird
UW	0	0	0	0	0'	4	0	0	RW						0	0	2'	8	4	5	0	0	0	0	0	0	0	4x	im EW gelöscht
							↓			18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW								0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	-	↑	
UW	0	0	0	0	0'	4	4	0	RW						0	0	3'	0	8	5	0	0	0	0	0	0	0	4x	
								↓		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	↑	
UW	0	0	0	0	0'	4	4	5	RW						0	0	3'	1	1	5	0	0	0	0	0	0	0	5x	
		↓								18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW			0	0	6'	0	0	0'	3	1	0	0	-	-	-	-	-	-	↓	Koeffizient
UW -	0	1	0	0	0	0	0	0	RW						0	0	2'	8	0	5	0	0	0	0	0	0	0	1x	0,31 ins EW
UW löschen					↓					18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW						0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	↑	Wert 0,31 wird
UW	0	0	0	0	3'	0	0	0	RW						0	2	0'	8	0	5	0	0	0	0	0	0	0	3x	im EW gelöscht
						↓				18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW							0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	-	-	↓	
UW	0	0	0	0	2'	8	0	0	RW						0	1	9'	6	0	5	0	0	0	0	0	0	0	2x	
								↓		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	↑	
UW	0	0	0	0	2'	8	0	5	RW						0	1	9'	6	3	5	0	0	0	0	0	0	0	5x	
		↓								18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW			0	0	6'	0	0	2'	7	5	0	0	-	-	-	-	-	-	↑	Koeffizient
UW	0	1	0	0	0	0	0	0	RW						0	2	2'	3	8	5	0	0	0	0	0	0	0	1x	2,75 ins EW
UW löschen				↓						18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW					0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	↑	Wert 2,75 wird
UW	0	0	0	2	0'	0	0	0	RW						1	4	2'	3	8	5	0	0	0	0	0	0	0	2x	im EW gelöscht
					↓					18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW						0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	↑	
UW	0	0	0	2	2'	0	0	0	RW						1	5	4'	3	8	5	0	0	0	0	0	0	0	2x	
						↓				18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW							0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	-	-	↑	
UW	0	0	0	2	2'	4	0	0	RW						1	5	6'	7	8	5	0	0	0	0	0	0	0	4x	
							↓			18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW								0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	-	↓	
UW	0	0	0	2	2'	3	8	0	RW						1	5	6'	6	6	5	0	0	0	0	0	0	0	2x	
								↓		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	↑	
UW	0	0	0	2	2'	3	8	5	RW						1	5	6'	6	9	5	0	0	0	0	0	0	0	5x	
		↓								18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW			0	0	6'	0	0	6'	8	8	4	0	-	-	-	-	-	-	↑	Koeffizient
UW	0	1	0	0	0	0	0	0	RW						1	6	3'	5	7	9	0	0	0	0	0	0	0	1x	6,884 ins EW

Endergebnis im RW: 163,579

<u>9.1.3. Aufgabe:</u> **$y = 0{,}445\,x^3 - 0{,}31\,x^2 + 2{,}75\,x + 6{,}884$**

Es soll das Polynom für den x-Wert = - 4 berechnet werden: **x = - 4**

Wird statt x der negative Wert -x eingesetzt, so kehren sich die Koeffizienten-Vorzeichen der ungeradzahligen Exponenten um:

$y(-x) = -0{,}445\,x^3 - 0{,}31\,x^2 - 2{,}75\,x + 6{,}884$, wobei jetzt mit x = 4 gerechnet werden kann.

Durch das Umstellen des Polynoms bzgl. negativer x-Werte, wird unsere Variable positiv und läßt sich nunmehr wie im vorherigen Beispiel einsetzen.

Rechengang nach Horner-Schema:

->	4 x (-0,445)	= -1,780	
->	-1,780 – 0,31	= -2,090	
->	4 x (-2,090)	= -8,360	
->	-8,360 - 2,75	= -11,110	
->	4 x (-11,11)	= -44,440	
->	-44,440 + 6,884	= -37,556	**$y_{(x=-4)}$ = - 037,556**

Schritte an der Rechenmaschine:

1. Schritt:	Ins RW wird der Koeffizient - 0,445 übertragen	-> **999,555**
2. Schritt:	..999,555 wird mit 3 multipliziert und ins RW addiert	->3x.999,555 + .999,445 = .**998,220**
3. Schritt:	Ins RW wird der Koeffizient -0,31 übertragen	-> .998,220 – 0,31 = .**997,910**
4. Schritt:	..997,910 wird mit 3 multipliziert und ins RW addiert	->3x.997,910 + .997,910 = .**991,640**
5. Schritt:	Ins RW wird der Koeffizient - 2,75 übertragen	-> .991,640 - 2,75 = .**988,890**
6. Schritt:	..988,890 wird mit 3 multipliziert und ins RW addiert	->3x .988,890 + .988,890 = .**955,560**
7. Schritt:	Ins RW wird der Koeffizient 6,884 übertragen	-> .955,560 + 6,884 = ...**962,444**

Als Endergebnis liegt der Wert ...962,444 im RW vor, welcher aber als negativ zu werten wäre, da im RW ein Vorzeichenwechsel erfolgt ist. D.h., es ergibt sich die Ergänzung zur Nullstellung im Zählwerk RW.

- (1000,000 – 962,444) = **- 37,556**

Schon im ersten Schritt folgt eine Vorzeichenumkehr im RW, weil der erste Koeffizient negativ geworden ist. Im Zählwerk des RW steht zwar nicht der negative Wert von 0,445, sondern der komplementäre Wert hinsichtlich 1000,000..., also 1000,000 – 0,445 = 999,555. Dieser Wert ist nun für die weitere Multiplikation zu berücksichtigen usw. Bis auf die Tatsache, daß im RW das Komplement vorliegt, wird genauso nach dem Schema gerechnet, wie es im vorherigen Beispiel angewandt wurde.

<u>Rechentableau an der Rechenmaschine:</u>
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

		▼								18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW			0	0	3'	0	0	0'	4	4	5	0	-	-	-	-	-	-	↓	Koeffizient
UW -	0	1	0	0	0'	0	0	0	RW						9	9	9'	5	5	5	0	0	0	0	0	0	0	1x	0,445 ins EW
UW löschen						▼				18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW							0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	-	-	↓	Wert 0,445 wird
UW	9	9	9	9	9'	6	0	0	RW						9	9	8'	3	5	5	0	0	0	0	0	0	0	4x	im EW gelöscht
							▼			18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW								0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	-	↓	
UW	9	9	9	9	9'	5	6	0	RW						9	9	8'	2	3	5	0	0	0	0	0	0	0	4x	
								▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	↓	
UW	9	9	9	9	9'	5	5	5	RW						9	9	8'	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	5x	
		▼								18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW			0	0	3'	0	0	0'	3	1	0	0	-	-	-	-	-	-	↓	Koeffizient
UW -	0	1	0	0	0	0	0	0	RW						9	9	7'	9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1x	0,31 ins EW
UW löschen					▼					18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW						0	0	3'	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	↓	Wert 0,31 wird
UW	9	9	9	9	8'	0	0	0	RW						9	9	1'	9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2x	im EW gelöscht
						▼				18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW							0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	-	-	↓	
UW	9	9	9	9	7'	9	0	0	RW						9	9	1'	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1x	
							▼			18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW								0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	↑	
UW	9	9	9	9	7'	9	1	0	RW						9	9	1'	6	4	0	0	0	0	0	0	0	0	1x	
		▼								18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW			0	0	3'	0	0	2'	7	5	0	0	-	-	-	-	-	-	↓	Koeffizient
UW -	0	1	0	0	0	0	0	0	RW						9	8	8'	8	9	0	0	0	0	0	0	0	0	1x	2,75 ins EW
UW löschen				▼						18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW					0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	↓	Wert 2,75 wird
UW	9	9	9	9	0'	0	0	0	RW						9	5	8'	8	9	0	0	0	0	0	0	0	0	1x	im EW gelöscht
					▼					18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW						0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	↓	
UW	9	9	9	8	9'	0	0	0	RW						9	5	5'	8	9	0	0	0	0	0	0	0	0	1x	
						▼				18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW							0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	-	-	↓	
UW	9	9	9	8	8'	9	0	0	RW						9	5	5'	5	9	0	0	0	0	0	0	0	0	1x	
							▼			18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW								0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	-	↓	
UW	9	9	9	8	8'	8	9'	0	RW						9	5	5'	5	6	0	0	0	0	0	0	0	0	1x	
UW löschen		▼								18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW			0	0	3'	0	0	6'	8	8	4	0	-	-	-	-	-	-	↑	Koeffizient
UW	0	1	0	0	0	0	0	0	RW						9	6	2'	4	4	4	0	0	0	0	0	0	0	1x	6,884 ins EW

Ergebnis im RW: 962,444 d.h., - (1000 – 962,444) = **- 37,556** als Endergebnis.

9.2 Polynome mit nicht ganzzahligen Variablen

Das Prinzip Horner-Schema läßt sich in diesem Fall genauso anwenden wie bei den ganzzahligen Variablen. Ein Nachteil liegt eigentlich nur dann vor, wenn die zusätzlichen Kommastellen der Variablen zu groß ausfallen. Dann wäre darauf zu achten, die störenden Stelllen der Variable (x-1) im EW jedesmal zu eliminieren, wenn die Koeffizienten ins RW addiert/subtrahiert werden.

<u>9.2.1 Aufgabe:</u> **$y = 0{,}445\,x^3 - 0{,}31\,x^2 + 2{,}75\,x + 6{,}884$**

Es soll das Polynom für den x-Wert = 1,3 berechnet werden: **x = 1,3**

Rechengang nach Horner-Schema:

->	1,3 x 0,445	= 0,5785
->	0,5785 – 0,31	= 0,2685
->	1,3 x 0,2685	= 0,34905
->	0,34905 + 2,75	= 3,09905
->	1,3 x 3,09905	= 4,028765
->	4,028765 + 6,884	= 10,912765

y $_{(x = 1,3)}$ **= 10,912765**

Schritte an der Rechenmaschine:

1. Schritt:	Ins RW wird der Koeffizient 0,445 übertragen	-> **0,445**
2. Schritt:	0,445 wird mit 1,3 multipliziert und ins RW addiert	-> 0,3x 0,445 + 0,445 = **0,5785**
3. Schritt:	Ins RW wird der Koeffizient -0,31 übertragen	-> 0,5785 – 0,31 = **0,2685**
4. Schritt:	0,2685 wird mit 1,3 multipliziert und ins RW addiert	-> 0,3x 0,2685 + 0,2685 = **0,34905**
5. Schritt:	Ins RW wird der Koeffizient 2,75 übertragen	-> 0,34905 + 2,75 = **3,09905**
6. Schritt:	3,09905 wird mit 1,3 multipliziert und ins RW addiert	-> 0,3x 3,09905 + 3,09905 = **4,028765**
7. Schritt:	Ins RW wird der Koeffizient 6,884 übertragen	-> 4,028765 + 6,884 = **10,912765**

<u>Rechentableau an der Rechenmaschine:</u>

Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

	▼									18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW		0	0	0'	3	0	0'	4	4	5	0	-	-	-	-	-	-	-	↑	Koeffizient
UW	1	0	0	0'	0	0	0	0	RW						0	0'	4	4	5	0	0	0	0	0	0	0	0	1x	0,445 ins EW
UW löschen					▼					18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW						0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	-	-	-	↑	Wert 0,445 wird
UW	0	0	0	0'	4	0	0	0	RW						0	0'	5	6	5	0	0	0	0	0	0	0	0	4x	im EW gelöscht
						▼				18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW							0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	-	-	↑	
UW	0	0	0	0'	4	4	0	0	RW						0	0'	5	7	7	0	0	0	0	0	0	0	0	4x	
							▼	▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW								0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	-	↑	
UW	0	0	0	0'	4	4	5	0	RW						0	0'	5	7	8	5	0	0	0	0	0	0	0	5x	
	▼									18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW		0	0	0'	3	0	0'	3	1	0	0	-	-	-	-	-	-	-	↓	Koeffizient
UW -	1	0	0	0	0	0	0	0	RW						0	0'	2	6	8	5	0	0	0	0	0	0	0	1x	0,31 ins EW
UW löschen					▼					18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW						0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	-	-	-	↑	Wert 0,31 wird
UW	0	0	0	0'	3	0	0	0	RW						0	0'	3	5	8	5	0	0	0	0	0	0	0	3x	im EW gelöscht
						▼				18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW							0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	-	-	↓	
UW	0	0	0	0'	2	7	0	0	RW						0	0'	3	4	9	5	0	0	0	0	0	0	0	3x	
							▼			18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	3	0	0	0	0	0	0	-	↓	
UW	0	0	0	0'	2	6	8	0	RW						0	0'	3	4	8	9	0	0	0	0	0	0	0	2x	
								▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	↑	
UW	0	0	0	0'	2	6	8	5	RW						0	0'	3	4	9	0	5	0	0	0	0	0	0	5x	
	▼									18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW		0	0	0'	3	0	2'	7	5	0	0	-	-	-	-	-	-	-	↑	Koeffizient
UW	1	0	0	0	0	0	0	0	RW						0	3'	0	9	9	0	5	0	0	0	0	0	0	1x	2,75 ins EW
UW löschen				▼						18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW					0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	↑	Wert 2,75 wird
UW	0	0	0	3'	0	0	0	0	RW						0	3'	9	9	9	0	5	0	0	0	0	0	0	3x	im EW gelöscht
					▼					18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW						0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	-	-	-	↑	
UW	0	0	0	3'	1	0	0	0	RW						0	4'	0	2	9	0	5	0	0	0	0	0	0	1x	
							▼			18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW								0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	-	↓	
UW	0	0	0	3'	0	9	9	0	RW						0	4'	0	2	8	7	5	0	0	0	0	0	0	1x	
							▼			18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	↑	
UW	0	0	0	3'	0	9	9	1	RW						0	4'	0	2	8	7	8	0	0	0	0	0	0	1x	
	▼									18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW		0	0	0'	3	0	6'	8	8	4	0	-	-	-	-	-	-	-	↑	Koeffizient
UW	1	0	0	0	0	0	0	0	RW						1	0'	9	1	2	7	8	0	0	0	0	0	0	1x	6,884 ins EW

Ergebnis im RW: 10,91278

10. Die Berechnung von Potenzreihen

10.1 Das Rechnen mit Potenzreihen im Allgemeinen

Gegeben sei eine Potenzreihe der Form:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1}$$

Die Koeffizienten werden alle zueinander in Relation gesetzt mit der Vorschrift:

$q_0 = a_0 : a_1$
$q_1 = a_1 : a_2$
$q_2 = a_2 : a_3$
...
$q_n = a_n : a_{n+1}$

Die Einzelsummen der Potenzreihe lassen sich damit auf folgende Weise berechnen:

$S_0 = a_0$
$S_1 = a_0 + a_1x = S_0 + S_0\, x : q_0$
$S_2 = a_0 + a_1x + a_2x^2 = S_1 + (S_1 - S_0)x : q_1$
$S_3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = S_2 + (S_2 - S_1)x : q_2$
...
$S_{n+1} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} = S_n + (S_n - S_{n-1})x : q_n$

Die Methode mit den Einzelsummen soll nun als adäquates Werkzeug für die Berechnung auf der Rechenmaschine dienen. Dabei wird die Einzelsumme S_n auf der linken Seite des RW erzeugt und die Differenz $(S_n - S_{n-1})$ auf der rechten Seite des RW mittels der Dreisatzberechnung (siehe Punkt 7.) aufgebaut. Dadurch entsteht auf der linken Seite des RW die neue Einzelsumme S_{n+1} . Als erstes wird die Betrachtung der verschiedenen q-Relationen bzgl. der Koeffizienten nur auf positive Werte beschränkt.

10.2 Die Potenzreihe der e-Funktion

Die Potenzreihe der Funktion e^x wird beschrieben durch:

$$e^x = 1 + x / 1! + x^2 / 2! + x^3 / 3! + ...$$

mit $q_0 = a_0 = 1$
$q_1 = 2$
$q_2 = 3$
$q_3 = 4$
...
$q_n = n+1$

Es ergeben sich daher die Teilsummen:

$S_0 = a_0 = 1$
$S_1 = a_0 + a_1x = S_0 + S_0\, x : q_0 = 1 + 1x : 1 = 1 + x$
$S_2 = a_0 + a_1x + a_2x^2 = S_1 + (S_1 - S_0)x : q_1 = (1 + x) + xx : 2$
$S_3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = S_2 + (S_2 - S_1)x : q_2 = (1 + x + xx : 2) + (xx : 2)x : 3$
$S_4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_3x^3 = S_3 + (S_3 - S_2)x : q_3 = (1 + x + xx : 2 + (xx : 2)x : 3) + ((xx : 2)x : 3)x : 4$
...

10.2.1. Beispielaufgabe: $e^{0,87} = ?$

$e^x = 1 + x / 1! + x^2 / 2! + x^3 / 3! + x^4 / 4! + x^5 / 5! + x^6 / 6! + x^7 / 7! + x^8 / 8! + ...$

$e^x = 1 + 0,87 + 0,37845 + 0,1097505 + 0,0238707 + 0,0041535 + 0,0006023 + 0,0000749 + 0,0000081 + ...$

$e^x = 2,38691...$ **elektr. Taschenrechner-Wert:** **$e^x = 2,3869108535...$**

Rechentableau an der Rechenmaschine:
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

Für die Berechnung der Exponentialfunktion e^x auf der Rechenmaschine ist diesmal die Anzeige des Umdrehungszählwerkes unwichtig bzw. irrelevant. Im folgenden Tableau wird aber zur Orientierung und zur Kontrolle der Vorgehensweise die Anzeige des UW ebenfalls angegeben.
Des weiteren wird bei diesem Beispiel ausnahmsweise nur in die positive Richtung gekurbelt, weshalb an einigen Stellen einige Kurbeldrehungen mehr getätigt werden müssen. Weitere Beispiele werden später natürlich mit dem verkürzten Rechengang (Drehungen ins „Plus“ und „Minus“) dargestellt.

			▼							18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW				0	0	1'	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	↑	
UW	0	0	1	0	0	0	0	0	RW						1'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1x	1 wird notiert
			▼							18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW				0	0	0'	8	7	0	0	0	0	1'	-	-	-	-	-	↑	
UW	0	0	2	0	0	0	0	0	RW						1'	8	7	0	0	0	0	1'	0	0	0	0	0	1x	1,87 wird notiert
				▼						18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW					0	0	0	8	7	0	0	0	0	2	-	-	-	-	↑	
UW	0	0	2	4	0	0	0	0	RW						2'	2	1	8	0	0	0	1'	8	0	0	0	0	4x	
					▼					18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW						0	0	0	8	7	0	0	0	0	2	-	-	-	↑	
UW	0	0	2	4	3	0	0	0	RW						2'	2	4	4	1	0	0	1'	8	6	0	0	0	3x	
						▼				18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW							0	0	0	8	7	0	0	0	0	2	-	-	↑	
UW	0	0	2	4	3	5	0	0	RW						2'	2	4	8	4	5	0	1'	8	7	0	0	0	5x	2,24845 wird notiert
				▼						18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW					0	0	0'	8	7	0	0	0	0	3	-	-	-	-	↑	
UW	0	0	2	5	3	5	0	0	RW						2'	3	3	5	4	5	0	2'	1	7	0	0	0	1x	
					▼					18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW						0	0	0	8	7	0	0	0	0	3	-	-	-	↑	
UW	0	0	2	5	5	5	0	0	RW						2'	3	5	2	8	5	0	2'	2	3	0	0	0	2x	
						▼				18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW							0	0	0	8	7	0	0	0	0	3	-	-	↑	
UW	0	0	2	5	6	1	0	0	RW						2'	3	5	8	0	7	0	2'	2	4	8	0	0	6x	
							▼			18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW								0	0	0	8	7	0	0	0	0	3	-	↑	
UW	0	0	2	5	6	1	1	0	RW						2'	3	5	8	1	5	7	2'	2	4	8	3	0	1x	
								▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	0,87 wird aufgerundet
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	0	9	0	0	0	0	0	3	↑	zu 0,9
UW	0	0	2	5	6	1	1	5	RW						2'	3	5	8	2	0	2	2'	2	4	8	4	5	5x	2,358202 wird notiert
					▼					18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW						0	0	0	8	7	0	0	0	0	4	-	-	-	↑	
UW	0	0	2	5	8	1	1	5	RW						2'	3	7	5	6	0	2	2'	3	2	8	4	5	2x	
						▼				18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW							0	0	0	8	7	0	0	0	0	4	-	-	↑	
UW	0	0	2	5	8	8	1	5	RW						2'	3	8	1	6	9	2	2'	3	5	6	4	5	7x	
							▼			18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW								0	0	0	8	7	0	0	0	0	4	-	↑	
UW	0	0	2	5	8	8	5	5	RW						2'	3	8	2	0	4	0	2'	3	5	8	0	5	4x	
								▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	0,87 wird aufgerundet
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	0	9	0	0	0	0	0	4	↑	zu 0,9
UW	0	0	2	5	8	8	5	9	RW						2'	3	8	2	0	7	6	2'	3	5	8	2	1	4x	2,382076 wird notiert

(nächste Seite geht es weiter)

						↓		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	2	5	9	2	5	9
							↓	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	2	5	9	3	2	9
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	2	5	9	3	3	6
							↓	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	2	5	9	3	9	6
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	2	5	9	4	0	5
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	2	5	9	4	1	4
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	2	5	9	4	1	5

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW							0	0	0	8	7	0	0	0	0	5	-	-	↑	
RW						2'	3	8	5	5	5	6	2'	3	7	8	2	1	4x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW								0	0	0	8	7	0	0	0	0	5	-	↑	
RW						2'	3	8	6	1	6	5	2'	3	8	1	7	1	7x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	0,87 wird aufgerundet
EW									0	0	0	9	0	0	0	0	0	5	↑	zu 0,9
RW						2'	3	8	6	2	2	8	2'	3	8	2	0	6	7x	2,386228 wird notiert
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW								0	0	0	8	7	0	0	0	0	6	-	↑	
RW						2'	3	8	6	7	5	0	2'	3	8	5	6	6	6x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	0,87 wird aufgerundet
EW									0	0	0	9	0	0	0	0	0	6	↑	zu 0,9
RW						2'	3	8	6	8	3	1	2'	3	8	6	2	0	9x	2,386831 wird notiert
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	0,87 wird aufgerundet
EW									0	0	0	9	0	0	0	0	0	7	↑	zu 0,9
RW						2'	3	8	6	9	1	2	2'	3	8	6	8	3	9x	2,386912 wird notiert
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	0,87 wird aufgerundet
EW									0	0	0	9	0	0	0	0	0	8	↑	zu 0,9
RW						2'	3	8	6	9	2	1	2'	3	8	6	9	1	1x	

Auf der linken Seite im RW ist das Endergebnis abzulesen: **$e^{0,87} \approx 2,386921$** (auf 5 Stellen genau).

10.2.2. Beispielaufgabe: **$10^{1,76} = ?$**

Exponentialfunktionen können auch hinsichtlich einer anderen Basis berechnet werden. Dazu ist nur eine Umformung des Ausdruckes notwendig, in der die Basis 10 als Exponentialfunktion zur Basis e umgewandelt wird. Dieses geschieht durch die Multiplikation des Exponenten mit ln(10) ≈ 2,302585.

$$10^{1,76} = 10^1 \times 10^{0,76} = 10 \times e^{0,76 \times 2,302585} \approx 10 \times e^{1,75}$$

Allgemein gilt: $B^{x} = \mathbf{e}^{\mathbf{x\ ln(B)}}$

B = 10 -> ln (B) = 2,302585093...

Aufgabe wird umgeformt in: **$10 \times e^{1,75} = ?$**

Berechnung mittels elektr. Taschenrechner:

$10 \times e^{1,75} = 57,54602676...$

und das wäre ungefähr

$10^{1,76} = 57,543999373...$

Anhand dieses Beispiels wird ersichtlich, daß das Ergebnis schon in der 5.Stelle abweicht, womit das angezeigte Resultat im RW völlig ausreichend wäre (bis zu 7 Stellen werden auf der linken Seite des RW dargestellt).

Rechentableau an der Rechenmaschine: **bzgl. $e^{1,75}$**
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

			v							18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW				0	0	1'	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	↑	
UW	0	0	1	0	0	0	0	0	RW						1'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1x	1 wird notiert
			v							18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW				0	0	1'	7	5	0	0	0	0	1'	-	-	-	-	-	↑	
UW	0	0	2	0	0	0	0	0	RW						2'	7	5	0	0	0	0	1'	0	0	0	0	0	1x	2,75 wird notiert
			v							18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW				0	0	1'	7	5	0	0	0	0	2'	-	-	-	-	-	↑	
UW	0	0	3	0	0	0	0	0	RW						4'	5	0	0	0	0	0	3'	0	0	0	0	0	1x	
				v						18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW					0	0	1	7	5	0	0	0	0	2	-	-	-	-	↓	
UW	0	0	2	9	0	0	0	0	RW						4'	3	2	5	0	0	0	2'	8	0	0	0	0	1x	
					v					18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW						0	0	1	7	5	0	0	0	0	2	-	-	-	↓	
UW	0	0	2	8	8	0	0	0	RW						4'	2	9	0	0	0	0	2'	7	6	0	0	0	2x	
						v				18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW							0	0	1	7	5	0	0	0	0	2	-	-	↓	
UW	0	0	2	8	7	5	0	0	RW						4'	2	8	1	2	5	0	2'	7	5	0	0	0	5x	4,28125 wird notiert
				v						18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW					0	0	1	7	5	0	0	0	0	3	-	-	-	-	↑	
UW	0	0	3	3	7	5	0	0	RW						5'	1	5	6	2	5	0	4'	2	5	0	0	0	5x	
					v					18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW						0	0	1	7	5	0	0	0	0	3	-	-	-	↑	
UW	0	0	3	3	8	5	0	0	RW						5'	1	7	3	7	5	0	4'	2	8	0	0	0	1x	
							v			18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW							0	0	0	1	7	5	0	0	0	0	3	-	↑	
UW	0	0	3	3	8	5	4	0	RW						5'	1	7	4	4	5	0	4'	2	8	1	2	0	4x	
								v		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	1,75 wird aufgerundet
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	1	8	0	0	0	0	0	3	↑	zu 1,8
UW	0	0	3	3	8	5	4	2	RW						5'	1	7	4	4	8	6	4'	2	8	1	2	6	2x	5,174486 wird notiert
				v						18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW					0	0	1	7	5	0	0	0	0	4	-	-	-	-	↑	
UW	0	0	3	5	8	5	4	2	RW						5'	5	2	4	4	8	6	5'	0	8	1	2	6	2x	
					v					18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW						0	0	1	7	5	0	0	0	0	4	-	-	-	↑	
UW	0	0	3	6	0	5	4	2	RW						5'	5	5	9	4	8	6	5'	1	6	1	2	6	2x	
						v				18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW							0	0	1	7	5	0	0	0	0	4	-	-	↑	
UW	0	0	3	6	0	8	4	2	RW						5'	5	6	4	7	3	6	5'	1	7	3	2	6	3x	
							v			18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW								0	0	1	7	5	0	0	0	0	4	-	↑	
UW	0	0	3	6	0	8	7	2	RW						5'	5	6	5	2	6	1	5'	1	7	4	4	6	3x	
								v		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	1,75 wird aufgerundet
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	1	8	0	0	0	0	0	4	↑	zu 1,8
UW	0	0	3	6	0	8	7	3	RW						5'	5	6	5	2	7	9	5'	1	7	4	5	0	1x	5,565279 wird notiert
				v						18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW					0	0	1	7	5	0	0	0	0	5	-	-	-	-	↑	
UW	0	0	3	7	0	8	7	3	RW						5'	7	4	0	2	7	9	5'	6	7	4	5	0	1x	
					v					18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW						0	0	1	7	5	0	0	0	0	5	-	-	-	↓	
UW	0	0	3	6	8	8	7	3	RW						5'	7	0	5	2	7	9	5'	5	7	4	5	0	2x	
						v				18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW							0	0	1	7	5	0	0	0	0	5	-	-	↓	
UW	0	0	3	6	8	6	7	3	RW						5'	7	0	1	7	7	9	5'	5	6	4	5	0	2x	
							v			18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW								0	0	1	7	5	0	0	0	0	5	-	↑	
UW	0	0	3	6	8	6	9	3	RW						5'	7	0	2	1	2	9	5'	5	6	5	5	0	2x	
								v		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	1,75 wird aufgerundet
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	1	8	0	0	0	0	0	5	↓	zu 1,8
UW	0	0	3	6	8	6	8	9	RW						5'	7	0	2	0	5	7	5'	5	6	5	3	0	4x	5,702057 wird notiert
					v					18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW						0	0	1	7	5	0	0	0	0	6	-	-	-	↑	
UW	0	0	3	7	0	6	8	9	RW						5'	7	3	7	0	5	7	5'	6	8	5	3	0	2x	
						v				18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW							0	0	1	7	5	0	0	0	0	6	-	-	↑	
UW	0	0	3	7	0	9	8	9	RW						5'	7	4	2	3	0	7	5'	7	0	3	3	0	3x	
							v			18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW								0	0	1	7	5	0	0	0	0	6	-	↓	
UW	0	0	3	7	0	9	6	9	RW						5'	7	4	1	9	5	7	5'	7	0	2	1	0	2x	

(auf der nächsten Seite geht es weiter)

								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	3	7	0	9	6	8
					▼			
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	3	7	1	9	6	8
						▼		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	3	7	1	5	6	8
							▼	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	3	7	1	5	3	8
						▼		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	3	7	1	6	3	8
							▼	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	3	7	1	6	5	8
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	3	7	1	6	6	3
							▼	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	3	7	1	6	8	3
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	3	7	1	6	8	7
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	3	7	1	6	9	1
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	3	7	1	6	9	2

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	1,75 wird aufgerundet
EW									0	0	1	8	0	0	0	0	0	6	↓	zu 1,8
RW						5'	7	4	1	9	3	9	5'	7	0	2	0	4	1x	5,741939 wird notiert
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW						0	0	1	7	5	0	0	0	0	7	-	-	-	↑	
RW						5'	7	5	9	4	3	9	5'	7	7	2	0	4	1x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW							0	0	1	7	5	0	0	0	0	7	-	-	↓	
RW						5'	7	5	2	4	3	9	5'	7	4	4	0	4	4x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW								0	0	1	7	5	0	0	0	0	7	-	↓	
RW						5'	7	5	1	9	1	4	5'	7	4	1	9	4	3x	5,751914 wird notiert
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW							0	0	1	7	5	0	0	0	0	8	-	-	↑	
RW						5'	7	5	3	6	6	4	5'	7	4	9	9	4	1x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW								0	0	1	7	5	0	0	0	0	8	-	↑	
RW						5'	7	5	4	0	1	4	5'	7	5	1	5	4	2x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	1,75 wird aufgerundet
EW									0	0	1	8	0	0	0	0	0	8	↑	zu 1,8
RW						5'	7	5	4	1	0	4	5'	7	5	1	9	4	5x	5,754104 wird notiert
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW								0	0	1	7	5	0	0	0	0	9	-	↑	
RW						5'	7	5	4	4	5	4	5'	7	5	3	7	4	2x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	1,75 wird aufgerundet
EW									0	0	1	8	0	0	0	0	0	9	↑	zu 1,8
RW						5'	7	5	4	5	2	6	5'	7	5	4	1	0	4x	5,754526 wird notiert
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	1,75 wird aufgerundet
EW									0	0	1	8	0	0	0	0	1	0	↑	zu 1,8
RW						5'	7	5	4	5	9	8	5'	7	5	4	5	0	4x	5,754598 wird notiert
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	1,75 wird aufgerundet
EW									0	0	1	8	0	0	0	0	1	1	↑	zu 1,8
RW						5'	7	5	4	6	1	6	5'	7	5	4	6	1	1x	

Diesmal liegt sowohl im linken als auch im rechten Bereich des RW ein übereinstimmendes Ergebnis vor:

$e^{1,75}$ = 5,75461 **(genaues Ergebnis $e^{1,75}$ = 5,754602676...)**

Mit dem zur Verfügung stehenden Resutatszählwerk (13 Stellen) wären nach diesem Schema an die 5 Stellen berechenbar. Um noch genauere Ergebnisse zu erzielen, sollte eine Rechenmaschine mit 16 Stellen im RW zur Anwendung kommen. Dabei sollte aber auch bedacht werden, daß die Prozedur einen noch weit höheren Aufwand erfordert. Angesichts der Länge des vorliegenden Tableaus ist das nicht unbedingt zweckmäßig, es sei denn, daß es wirklich auf ein sehr genaues Ergebnis ankommt.

10.3 Die Potenzreihe der sin-Funktion

Die Potenzreihe der Funktion sin (x) wird beschrieben durch:

$$\sin(x) = x / 1! - x^3 / 3! + x^5 / 5! - x^7 / 7! + x^9 / 9! \ -+ \ldots$$

mit
$q_0 = a_0 = x$
$q_1 = -6$
$q_2 = -20$
$q_3 = -42$
$q_4 = -72$
...

Es handelt sich diesmal um eine alternierende Reihe, deren fortlaufenden Glieder stets um x^2 / q_i multipliziert werden. Der Unterschied liegt also erstmal in der Multiplikation von $u = x^2$. Zum anderen sind jetzt alle weiteren q-Relationen negativ!

$$\sin(x) = \sin(u^{0,5}) = \ x / 1! - xu^1 / 3! + xu^2 / 5! - xu^3 / 7! + xu^4 / 9! \ -+ \ldots$$

Die Problematik zur Handhabung dieser Potenzreihe auf der Rechenmaschine besteht darin, daß auf der linken Seite im EW ein positiver Wert vorliegt (einmal x und dann nur noch $u = x^2$), <u>aber</u> auf der rechten Seite hingegen ein negativer q-Wert! Die Rechenmaschine kann diesen Vorzeichenunterschied im EW nur dadurch bereitstellen, indem auf der Seite mit den q-Werten die sogenannte Zehnerergänzung (das Komplement jenes negativen Wertes) eingetragen wird.

Beispiel:	$q_1 = -6$	->	. . . . . . 9 4	entspricht 100 - 6
	$q_2 = -20$	->	. . . . . . 8 0	entspricht 100 - 20
	$q_3 = -42$	->	. . . . . . 5 8	entspricht 100 - 42
	$q_4 = -72$	->	. . . . . . 2 8	entspricht 100 - 72

Das nächste Problem ergibt sich aus der Position des Schlittens bzw. der Wagenstellung. Da im linken Bereich des EW möglichst viele Stellen von $u = x^2$ eingestellt werden, muß darauf geachtet werden, daß die letzten Stellen nicht in das Resultat im rechten Bereich des RW hinübergreifen! Je mehr der Schlitten in Richtung der rechten RW-Anzeige positioniert wird, desto mehr Stellen sind im linken Bereich des EW zu eliminieren. Dabei werden diesmal keine Nullen im EW übernommen, sondern weitere Neunen (9) links an das q-Komplement angehangen!

Beispiel: es sei z.B. u = 0,550215 -> im EW steht dann: 550215 9400 (Schlitten auf „6“)

Mit fortlaufender Schlittenbewegung nach rechts ergeben sich zwingendermaßen folgende Eliminationen:

550219 9400	Schlittenstellung auf „5“
550199 9400	Schlittenstellung auf „4“
549999 9400	Schlittenstellung auf „3“
549999 9400	Schlittenstellung auf „2“
599999 9400	Schlittenstellung auf „1“

(Die Schlittenstellungen beziehen sich hier beispielsweise auf eine Rechenmaschine mit 16 Stellen im RW)
Die Umstellung im EW sind natürlich so vorzunehmen, daß die mit Neunen aufgefüllte Einstellung möglichst nahe an den Wert u herankommt (also bei Schlittenstellung „3“ <u>nicht</u> 550999 einstellen!).

<u>10.3.1. Beispielaufgabe:</u> **sin(42,5°) = ?**

Die Berechnung der Sinus-Werte kann über die Potenzreihe nur mittels der Bogenmaße (rad) erfolgen. Daher ist der Winkel in ein Bogenmaß umzurechnen.

42,5° entspricht $x = 42{,}5° \times \pi / 180° =$ **0,741765**

Quadrierung von x: $x^2 = u =$ **0,550215**

An der Rechenmaschine wird am Anfang (erster Schritt) der Zahlenwert x = 0,741765 ins RW übernommen. Dann wird im EW der Wert u = 0,550215 fortan berücksichtigt und die entsprechenden q-Wert-Komplemente eingetragen). Die restlichen Schritte sind eigentlich analog zu den Rechenschritten hinsichtlich der Exponentialfunktion e^x durchzuführen.
Das folgende Beispiel wird wieder mit einer 13-stelligen RW-Anzeige durchgeführt. Da aber dann nur maximal 3 Schlittenbewegungen (von 4 bis 1) möglich sind, sollen weitere Stellenverschiebungen durch das EW simuliert werden. In diesem Fall werden die Einstellungen im EW um jeweils eine Stelle nach rechts übertragen (aus 549999 9400 wird 0549999 940 und dann 00549999 94). Dadurch lassen sich mehrere Stellen genauer berechnen.

Rechentableau an der Rechenmaschine: **bzgl. sin(0,741765)**
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

					▼			
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	1	0	0	0
						▼		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	9	0	0
							▼	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	8	8	0
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	8	7	6
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	8	8	0
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	8	7	7
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	8	8	0
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	8	8	4
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	8	8	6
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	8	8	2
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	8	7	7
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	8	7	8

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW					0'	7	4	1	7	6	5	0	0	0	0	-	-	-	↑	
RW					0'	7	4	1	7	6	5	0	0	0	0	0	0	0	1x	0,741765 wird notiert
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW							5	5	0	2	1	5	9	4	0	0	-	-	↓	
RW					0'	6	8	6	7	4	3	4	0'	6	0	0	0	0	1x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW								5	5	0	2	1	9	9	4	0	0	-	↓	abrunden auf 0,55021
RW					0'	6	7	5	7	3	9	0	0'	7	2	0	0	0	2x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW									5	5	0	1	9	9	9	4	0	0	↓	abrunden auf 0,5501
RW					0'	6	7	3	5	3	8	2	0'	7	4	4	0	0	4x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	5	4	9	9	9	9	9	4	0	↑	abrunden auf 0,549
RW					0'	6	7	3	7	5	8	2	0'	7	4	1	6	0	4x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW									0	0	5	4	9	9	9	9	9	4	↓	abrunden auf 0,54
RW					0'	6	7	3	7	4	1	7	0'	7	4	1	7	8	3x	0,6737417 wird notiert
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									5	5	0	1	9	9	8	0	0	0	↑	abrunden auf 0,5501
RW					0'	6	7	5	3	9	2	3	0'	6	8	1	7	8	3x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	5	4	9	9	9	9	8	0	0	↑	abrunden auf 0,549
RW					0'	6	7	5	6	1	2	3	0'	6	7	3	7	8	4x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	0	0	5	9	9	9	9	9	8	↑	abrunden auf 0,5
RW					0'	6	7	5	6	1	3	5	0'	6	7	3	7	4	2x	0,6756135 wird notiert
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW									0	0	5	4	9	9	9	9	5	8	↓	abrunden auf 0,54
RW					0'	6	7	5	5	9	1	5	0'	6	7	5	4	2	4x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW									0	0	0	5	9	9	9	9	9	6	↓	
RW					0'	6	7	5	5	8	8	5	0'	6	7	5	6	2	5x	0,6755885 wird notiert
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	0	0	5	9	9	9	9	9	3	↑	
RW					0'	6	7	5	5	8	9	1	0'	6	7	5	5	5	1x	

Im RW steht das Ergebnis für: sin(42,5°) ≈ 0,675589
Das genaue Ergebnis lautet: sin(42,5°) = 0,675590207 6... [elektr. Taschenrechner]

Gerundet auf 0,67559 ist das Rechenergebnis bis auf 5 Stellen genau.

10.4 Die Potenzreihe der arcsin-Funktion

Die Potenzreihe der Funktion arcsin (x) wird beschrieben durch:

$$\arcsin(x) = x + (1/2)(1/3)x^3 + (1/2)(3/4)(1/5)x^5 + (1/2)(3/4)(5/6)(1/7)x^7 + (1/2)(3/4)(5/6)(7/8)(1/9)x^9 + \dots \quad , \text{wobei } |x| \leq 1$$

mit $q_0 = a_0 = x$
$q_1 = 6$
$q_2 = 20 / 9 \approx 2{,}2$
$q_3 = 42 / 25 \approx 1{,}68$
$q_4 = 72 / 49 \approx 1{,}47$
...

Die q-Relationen sind hier nur mit positivem Vorzeichen behaftet, sodaß keine 9er-Ergänzungen beim Rechnen auf der Maschine vorgenommen werden müssen (also ähnlich wie bei der e-Funktion).

$$\arcsin(x) = \arcsin(u^{0,5}) = x + (1/2)(1/3)xu^1 + (1/2)(3/4)(1/5)xu^2 + (1/2)(3/4)(5/6)(1/7)xu^3 + (1/2)(3/4)(5/6)(7/8)(1/9)xu^4 + \dots$$

10.4.1. Beispielaufgabe: **arcsin(0,454) = ?**

Quadrierung von x: $x^2 = u =$ **0,206116**

Rechentableau an der Rechenmaschine: **bzgl. arcsin(0,454)**

Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

					▼					18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW					0'	4	5	4	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	↑	
UW	0	0	0	0	1	0	0	0	RW					0'	4	5	4	0	0	0	0	0'	0	0	0	0	0	1x	0,454 wird notiert
						▼				18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW							2	0	6	1	1	6	0	6	0	0	-	-	↑	
UW	0	0	0	0	1	1	0	0	RW					0'	4	7	4	6	1	1	6	0'	6	0	0	0	0	1x	
							▼			18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW								2	0	6	1	2	0	0	6	0	0	-	↓	aufrunden zu 0,20612
UW	0	0	0	0	1	0	8	0	RW					0'	4	7	0	4	8	9	2	0'	4	8	0	0	0	2x	
								▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									2	0	6	1	0	0	0	6	0	0	↓	abrunden auf 0,2061
UW	0	0	0	0	1	0	7	6	RW					0'	4	6	9	6	6	4	8	0'	4	5	6	0	0	4x	
								▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	2	0	6	0	0	0	0	6	0	↓	abrunden auf 0,206
UW	0	0	0	0	1	0	7	3	RW					0'	4	6	9	6	0	3	0	0'	4	5	4	2	0	3x	
								▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	2	1	0	0	0	0	0	6	↓	aufrunden zu 0,21
UW	0	0	0	0	1	0	7	0	RW					0'	4	6	9	5	9	6	7	0'	4	5	4	0	2	3x	0,4695967 wird notiert
								▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									2	0	6	1	0	0	0	2	2	0	↑	abrunden auf 0,2061
UW	0	0	0	0	1	0	7	7	RW					0'	4	7	1	0	3	9	4	0'	4	6	9	4	2	7x	
								▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	2	0	6	0	0	0	0	2	2	↑	abrunden auf 0,206
UW	0	0	0	0	1	0	7	8	RW					0'	4	7	1	0	6	0	0	0'	4	6	9	6	4	1x	
								▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	2	1	0	0	0	0	0	2	↓	aufrunden zu 0,21
UW	0	0	0	0	1	0	7	6	RW					0'	4	7	1	0	5	5	8	0'	4	6	9	6	0	2x	0,4710558 wird notiert
								▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									2	0	6	1	0	0	0	1	6	8	↑	abrunden auf 0,2061
UW	0	0	0	0	1	0	7	7	RW					0'	4	7	1	2	6	1	9	0'	4	7	1	2	8	1x	
								▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	2	0	6	0	0	0	0	1	7	↓	abrunden auf 0,206
UW	0	0	0	0	1	0	7	5	RW					0'	4	7	1	2	2	0	7	0'	4	7	0	9	4	2x	
								▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	2	1	0	0	0	0	0	2	↑	aufrunden zu 0,21
UW	0	0	0	0	1	0	8	1	RW					0'	4	7	1	2	3	3	3	0'	4	7	1	0	6	6x	0,4712333 wird notiert
								▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	2	0	6	0	0	0	0	1	5	↑	abrunden auf 0,206
UW	0	0	0	0	1	0	8	2	RW					0'	4	7	1	2	5	3	9	0'	4	7	1	2	1	1x	
								▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	2	1	0	0	0	0	0	1	↑	
UW	0	0	0	0	1	0	8	4	RW					0'	4	7	1	2	5	8	1	0'	4	7	1	2	3	2x	

Im RW steht das Ergebnis für: arcsin(0,454) ≈ 0,471258

Das genaue Ergebnis lautet: arcsin(0,454) = 0,4712495605... [elektr. Taschenrechner]

0,471258 rad entspricht 0,471258 x 180°/ π = **27,00109°**

(= 27,0006109°) [elektr. Taschenrechner]

Gerundet auf 0,47126(rad) ist das Rechenergebnis bis auf 4 Stellen genau.

10.5 Die Potenzreihe der ln-Funktion (natürlicher Logarithmus)

Die Potenzreihe der Funktion ln(x) wird beschrieben durch:

$$\ln(x) = 2\,[\,v + (1/3)v^3 + (1/5)v^5 + (1/7)v^7 + \ldots\,] \qquad \text{, wobei } x > 0 \quad \text{und} \quad v = (x-1)/(x+1)$$

mit
$q_0 = a_0 = v$
$q_1 = 3$
$q_2 = 5 / 3 \approx 1{,}67$
$q_3 = 7 / 5 = 1{,}4$
$q_4 = 9 / 7 \approx 1{,}29$
$q_5 = 11 / 9 \approx 1{,}22$
...

Die q-Relationen sind erneut wieder nur mit positiven Vorzeichen behaftet, sodaß keine 9er-Ergänzungen beim Rechnen auf der Maschine vorgenommen werden müssen (ähnlich wie bei der e- & arcsin-Funktion).

$$\ln(x) = \ln(u^{0,5}) = 2\,[\,v + (1/3)vu^1 + (1/5)vu^2 + (1/7)vu^3 + \ldots\,]$$

mit $u = v^2 = [(x-1)/(x+1)]^2$

10.5.1. Beispielaufgabe: **ln(3,14) = ?**

$v = (3{,}14 - 1) / (3{,}14 + 1) =$ **0,516908**

Quadrierung von v: $v^2 = u =$ **0,267194**

Rechentableau an der Rechenmaschine: **bzgl. ln(3,14)**
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

				↓				
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	1	0	0	0
						↓		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	1	2	0	0
							↓	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	1	1	7	0
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	1	1	7	2
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	1	1	7	5
							↓	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	1	2	0	5
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	1	2	0	3
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	1	1	9	9

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW					0'	5	1	6	9	0	8	0	0	0	0	-	-	-	↑	
RW					0'	5	1	6	9	0	8	0	0'	0	0	0	0	0	1x	0,516908 wird notiert
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW							2	6	7	1	9	4	0	3	0	0	-	-	↑	
RW					0'	5	7	0	3	4	6	8	0'	6	0	0	0	0	2x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW								2	6	7	1	9	0	0	3	0	0	-	↓	
RW					0'	5	6	2	3	3	1	1	0'	5	1	0	0	0	3x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									2	6	7	2	0	0	0	3	0	0	↑	
RW					0'	5	6	2	8	6	5	5	0'	5	1	6	0	0	2x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	2	6	7	0	0	0	0	3	0	↑	
RW					0'	5	6	2	9	4	5	6	0'	5	1	6	9	0	3x	0,5629456 wird notiert
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW								2	6	7	1	9	0	0	1	6	7	-	↑	
RW					0'	5	7	0	9	6	1	3	0'	5	6	7	0	0	3x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW									2	6	7	2	0	0	0	1	6	7	↓	
RW					0'	5	7	0	4	2	6	9	0'	5	6	3	6	6	2x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW									0	2	6	7	0	0	0	0	1	7	↓	
RW					0'	5	7	0	3	2	0	1	0'	5	6	2	9	8	4x	

(auf der nächsten Seite geht es weiter)

								↓		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	2	7	0	0	0	0	0	2	↓	
UW	0	0	0	0	1	1	9	7	RW					0'	5	7	0	3	1	4	7	0'	5	6	2	9	4	2x	0,5703147 wird notiert
								↓		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									2	6	7	2	0	0	0	1	4	0	↑	
UW	0	0	0	0	1	2	0	2	RW					0'	5	7	1	6	5	0	7	0'	5	6	9	9	4	5x	
								↓		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	2	6	7	0	0	0	0	1	4	↑	
UW	0	0	0	0	1	2	0	5	RW					0'	5	7	1	7	3	0	8	0'	5	7	0	3	6	3x	
								↓		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	2	7	0	0	0	0	0	1	↓	
UW	0	0	0	0	1	2	0	1	RW					0'	5	7	1	7	2	0	0	0'	5	7	0	3	2	4x	0,571720 wird notiert
								↓		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									2	6	7	2	0	0	0	1	2	9	↑	
UW	0	0	0	0	1	2	0	2	RW					0'	5	7	1	9	8	7	2	0'	5	7	1	6	1	1x	
								↓		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	2	6	7	0	0	0	0	1	3	↑	
UW	0	0	0	0	1	2	0	3	RW					0'	5	7	2	0	1	3	9	0'	5	7	1	7	4	1x	
								↓		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	2	7	0	0	0	0	0	1	↓	
UW	0	0	0	0	1	2	0	1	RW					0'	5	7	2	0	0	8	5	0'	5	7	1	7	2	2x	0,5720085 wird notiert
								↓		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	2	6	7	0	0	0	0	1	2	↑	
UW	0	0	0	0	1	2	0	3	RW					0'	5	7	2	0	6	1	9	0'	5	7	1	9	6	2x	
								↓		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	2	7	0	0	0	0	0	1	↑	
UW	0	0	0	0	1	2	0	7	RW					0'	5	7	2	0	7	2	7	0'	5	7	2	0	0	4x	

Im RW steht das Ergebnis für: $\ln(3{,}14) \approx 2x\ 0{,}5720727 = 1{,}1441454$

Das genaue Ergebnis lautet: $\ln(3{,}14) = 1{,}1442228...$ [elektr. Taschenrechner]

Gerundet auf 1,14415 ist das Rechenergebnis bis auf 4 Stellen genau.

10.6 Die Potenzreihe der arctan-Funktion

Die Potenzreihe der Funktion arctan(x) wird beschrieben durch:

$$\arctan(x) = x - (1/3)x^3 + (1/5)x^5 - (1/7)x^7 +/- \ldots \quad , \text{wobei } |x| \leq 1$$

mit

$q_0 = a_0 = x$

$q_1 = -3$

$q_2 = -5/3 \approx -1{,}67$

$q_3 = -7/5 = -1{,}4$

$q_4 = -9/7 \approx -1{,}29$

$q_5 = -11/9 \approx -1{,}22$

$q_6 = -13/11 \approx -1{,}18$

$q_7 = -15/13 \approx -1{,}15$

...

Die q-Relationen besitzen negative Vorzeichen, da eine alternierende Reihe vorliegt. Deshalb sind diesmal die 9er-Ergänzungen beim Rechnen auf der Maschine durchzuführen (ähnlich wie bei der sin-Funktion).

$$\ln(x) = \ln(u^{0,5}) = x - (1/3)u^1 + (1/5)u^2 - (1/7)u^3 +/- \ldots$$

mit $u = x^2$

10.6.1. Beispielaufgabe: **arctan(0,851) = ?**

Quadrierung von x: $x^2 = u =$ **0,724201**

Rechentableau an der Rechenmaschine: **bzgl. arctan(0,851)**
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

	8	7	6	5	4	3	2	1
					↓			
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	1	0	0	0
						↓		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	7	0	0
							↓	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	7	2	0
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	7	1	6
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	7	1	9
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	7	2	2
						↓		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	8	2	2
							↓	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	8	4	2
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	8	4	5
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	8	4	7
							↓	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	7	8	7
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	7	8	3
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	7	8	7
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	7	8	2
							↓	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	8	2	2
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	8	1	8
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	8	1	5
								↓
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	0	8	1	9

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW					0'	8	5	1	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	↑	
RW					**0'**	**8**	**5**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	0'	0	0	0	0	0	1x	0,851 wird notiert
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW							7	2	4	2	0	1	9	7	0	0	-	-	↓	
RW					0'	6	3	3	7	3	9	4	0'	9	0	0	0	0	3x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW								7	2	4	1	9	9	9	7	0	0	-	↑	
RW					0'	6	4	8	2	2	3	4	0'	8	4	0	0	0	2x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW									7	2	4	1	9	9	9	7	0	0	↓	
RW					0'	6	4	5	3	2	6	6	0'	8	5	2	0	0	4x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	7	2	3	9	9	9	9	7	0	↑	
RW					0'	6	4	5	5	4	3	8	0'	8	5	1	1	0	3x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	0	7	1	9	9	9	9	9	7	↑	
RW					**0'**	**6**	**4**	**5**	**5**	**6**	**5**	**4**	**0'**	**8**	**5**	**1**	**0**	**1**	3x	0,6455654 wird notiert
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW							7	2	4	2	0	1	9	8	3	3	-	-	↑	
RW					0'	7	1	7	9	8	5	6	0'	6	8	4	0	1	1x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW								7	2	4	1	9	9	9	8	3	3	-	↑	
RW					0'	7	3	2	4	6	9	6	0'	6	5	0	6	1	2x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									7	2	4	1	9	9	9	8	3	3	↑	
RW					0'	7	3	4	6	4	2	2	0'	6	4	5	6	0	3x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	0	7	1	9	9	9	9	9	8	↑	
RW					**0'**	**7**	**3**	**4**	**6**	**5**	**6**	**6**	**0'**	**6**	**4**	**5**	**5**	**6**	2x	0,7346566 wird notiert
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW								7	2	4	1	9	9	9	8	6	0	-	↓	
RW					0'	6	9	1	2	0	4	6	0'	7	2	9	5	6	6x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW									7	2	4	1	9	9	9	8	6	0	↓	
RW					0'	6	8	8	3	0	7	8	0'	7	3	5	1	6	4x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	7	2	3	9	9	9	9	8	6	↑	
RW					0'	6	8	8	5	9	7	4	0'	7	3	4	6	0	4x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW									0	0	7	1	9	9	9	9	9	9	↓	
RW					**0'**	**6**	**8**	**8**	**5**	**6**	**1**	**4**	**0'**	**7**	**3**	**4**	**6**	**5**	5x	0,6885614 wird notiert
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW								7	2	4	1	9	9	9	8	7	1	-	↑	
RW					0'	7	1	7	5	2	9	4	0'	6	8	3	0	5	4x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW									7	2	4	1	9	9	9	8	7	1	↓	
RW					0'	7	1	4	6	3	2	6	0'	6	8	8	2	1	4x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW									0	7	2	3	9	9	9	9	8	7	↓	
RW					0'	7	1	4	4	1	5	4	0'	6	8	8	6	0	3x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	0	7	1	9	9	9	9	9	9	↑	
RW					**0'**	**7**	**1**	**4**	**4**	**4**	**4**	**2**	**0'**	**6**	**8**	**8**	**5**	**6**	4x	0,7144442 wird notiert

(auf der nächsten Seite geht es weiter)

							▼			18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW								7	2	4	1	9	9	9	8	7	8	-	↓	
UW	0	0	0	0	0	7	9	9	RW					0'	6	9	9	9	6	0	2	0'	7	1	2	9	6	2x	
								▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									7	2	4	1	9	9	9	8	7	8	↓	
UW	0	0	0	0	0	7	9	8	RW					0'	6	9	9	2	3	6	0	0'	7	1	4	1	8	1x	
								▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	7	2	3	9	9	9	9	8	8	↓	
UW	0	0	0	0	0	7	9	6	RW					0'	6	9	9	0	9	1	2	0'	7	1	4	4	2	2x	
								▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	7	1	9	9	9	9	9	9	↓	
UW	0	0	0	0	0	7	9	4	RW					0'	6	9	9	0	7	6	8	0'	7	1	4	4	4	2x	0,6990768 wird notiert
							▼			18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW								7	2	4	1	9	9	9	8	8	2	-	↑	
UW	0	0	0	0	0	8	0	4	RW					0'	7	0	6	3	1	8	8	0'	7	0	2	6	4	1x	
								▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									7	2	4	1	9	9	9	8	8	2	↑	
UW	0	0	0	0	0	8	0	7	RW					0'	7	0	8	4	9	1	4	0'	6	9	9	1	0	3x	
								▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	0	7	1	9	9	9	9	9	9	↑	
UW	0	0	0	0	0	8	0	9	RW					0'	7	0	8	5	0	5	8	0'	6	9	9	0	8	2x	0,7085058 wird notiert
								▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									7	2	4	1	9	9	9	8	8	5	↓	
UW	0	0	0	0	0	8	0	1	RW					0'	7	0	2	7	1	2	2	0'	7	0	8	2	8	8	
								▼		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
	8	7	6	5	4	3	2	1	EW									0	7	2	3	9	9	9	9	8	9	↓	
UW	0	0	0	0	0	7	9	9	RW					0'	7	0	2	5	6	7	4	0'	7	0	8	5	0	2x	0,7025674 wird notiert

Da zu erkennen ist, daß die Zwischenergebnisse auf der linken Seite des RW nur sehr schlecht gegen einen Grenzwert konvergieren, soll an dieser Stelle vorläufig Schluß sein. Dazu wird jetzt aus den beiden zuletzt notierten Werten der Mittelwert berechnet.

Im RW stehen die Ergebnis für: 0,7085058 und 0,7025674 -> Mittelwert = 0,7055366

Als Ergebnis liegt somit vor: arctan(0,851) ≈ **0,70554**
(bzw. 40,4243°)

Das genaue Ergebnis lautet: arctan(0,851) = **0,705074329...** [elektr. Taschenrechner]
(bzw. 40,39778...°)

Gerundet auf 0,70554 ist das Rechenergebnis bis auf 3 Stellen genau.

10.7 Die Potenzreihe der cos-Funktion

Die Potenzreihe der Funktion cos(x) wird beschrieben durch:

$$\cos(x) = 1 - (1 / 2!)x^2 + (1 / 4!)x^4 - (1 / 6!)x^6 +/- \ldots$$

mit $q_0 = a_0 = 1$
$q_1 = -2$
$q_2 = -12$
$q_3 = -30$
$q_4 = -56$
$q_5 = -90$
...

Die q-Relationen besitzen negative Vorzeichen, da eine alternierende Reihe vorliegt. Deshalb sind bekannterweise die 9er-Ergänzungen beim Rechnen auf der Maschine durchzuführen (ähnlich wie bei der sin-Funktion).

$$\cos(x) = \cos(u^{0,5}) = 1 - (1 / 2!)u^1 + (1 / 4!)u^2 - (1 / 6!)u^3 +/- \ldots$$

mit $u = x^2$

10.7.1. Beispielaufgabe: **cos(17,5°) = ?**

17,5° entspricht $x = 17{,}5° \times \pi / 180° =$ **0,305433**

Quadrierung von x: $x^2 = u =$ **0,0932891**

Rechentableau an der Rechenmaschine: **bzgl. cos(0,305433)**

Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

					↓			
	8	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*
UW	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
					↓			
	8	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*
UW	**9**	**9**	**9**	**9**	**6**	**0**	**0**	**0**
							↓	
	8	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*
UW	**9**	**9**	**9**	**9**	**6**	**0**	**4**	**0**
								↓
	8	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*
UW	**9**	**9**	**9**	**9**	**6**	**0**	**3**	**9**
								↓
	8	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*
UW	**9**	**9**	**9**	**9**	**6**	**0**	**3**	**8**
								↓
	8	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*
UW	**9**	**9**	**9**	**9**	**6**	**0**	**3**	**7**
								↓
	8	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*
UW	**9**	**9**	**9**	**9**	**6**	**0**	**3**	**4**

	18	*17*	*16*	*15*	*14*	*13*	*12*	*11*	*10*	*9*	*8*	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	**+**	
EW					**0**	**1'**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**-**	**-**	**-**	**↑**	
RW						**1'**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0'**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1x**	1,000 wird notiert
	18	*17*	*16*	*15*	*14*	*13*	*12*	*11*	*10*	*9*	*8*	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	**-**	
EW						**0**	**0**	**0**	**9**	**3**	**2**	**8**	**9**	**8**	**0**	**-**	**-**	**-**	**↓**	
RW						**0'**	**9**	**5**	**3**	**3**	**5**	**5**	**1'**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**5x**	0,9533551 wird notiert
	18	*17*	*16*	*15*	*14*	*13*	*12*	*11*	*10*	*9*	*8*	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	**+**	
EW								**0**	**0**	**0**	**9**	**2**	**9**	**9**	**8**	**8**	**0**	**-**	**↑**	
RW						**0'**	**9**	**5**	**3**	**7**	**2**	**7**	**0'**	**9**	**5**	**2**	**0**	**0**	**4x**	
	18	*17*	*16*	*15*	*14*	*13*	*12*	*11*	*10*	*9*	*8*	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	**-**	
EW									**0**	**0**	**0**	**8**	**9**	**9**	**9**	**8**	**8**	**0**	**↓**	
RW						**0'**	**9**	**5**	**3**	**7**	**1**	**8**	**0'**	**9**	**5**	**3**	**2**	**0**	**1x**	
	18	*17*	*16*	*15*	*14*	*13*	*12*	*11*	*10*	*9*	*8*	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	**-**	
EW									**0**	**0**	**0**	**0**	**9**	**9**	**9**	**9**	**8**	**8**	**↓**	
RW						**0'**	**9**	**5**	**3**	**7**	**1**	**7**	**0'**	**9**	**5**	**3**	**3**	**2**	**1x**	0,953717 wird notiert
	18	*17*	*16*	*15*	*14*	*13*	*12*	*11*	*10*	*9*	*8*	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	**-**	
EW									**0**	**0**	**0**	**0**	**9**	**9**	**9**	**9**	**7**	**0**	**↓**	
RW						**0'**	**9**	**5**	**3**	**7**	**1**	**6**	**0'**	**9**	**5**	**3**	**6**	**2**	**1x**	
	18	*17*	*16*	*15*	*14*	*13*	*12*	*11*	*10*	*9*	*8*	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	**-**	
EW									**0**	**0**	**0**	**0**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**7**	**↓**	
RW						**0'**	**9**	**5**	**3**	**7**	**1**	**3**	**0'**	**9**	**5**	**3**	**7**	**1**	**3x**	0,95371 wird notiert

Im RW ist schon frühzeitig zu erkennen, daß die Rechnung diesmal sehr schnell gegen einen festen Wert konvergiert. Da sowohl in der linken als auch der rechten Hälfte des RW das Ergebnis auf 5 Stellen übereinstimmt, sollte an dieser Stelle sinnvollerweise abgebrochen werden, weil sich das Ergebnis nicht mehr verbessern läßt.

Ergebnis im RW: cos(0,305433) ≈ **0,95371**

Das genaue Ergebnis lautet: cos(0,305433) = **0,953716836...** [elektr. Taschenrechner]

Vom Aufwand her betrachtet ist das Ergebnis ziemlich genau, was auch daran liegt, daß der Kosinus von einem relativ kleinen Bogenmaß (bzw. Winkelmaß) zu berechnen war. Denn bei kleinen Bogenmaßen kann der Kosinus auch durch folgende Näherungsformel berechnet werden:

$$\cos(x) \approx 1 - 0{,}5\, x^2$$

$$\cos(0{,}305433) \approx 1 - 0{,}5\, (0{,}305433)^2 = 0{,}953355...$$

Man sieht, die Näherungsformel liefert ein bis auf 3 Stellen genaues Ergebnis (rel. Fehler ca. 0,04 %).

10.8 Der „Schnell-Sinus“

Die Potenzreihe der Funktion sin (x) wird beschrieben durch: (siehe auch 10.3)

$$\sin(x) = x / 1! - x^3 / 3! + x^5 / 5! - x^7 / 7! + x^9 / 9! \; -+ \ldots$$

mit $q_0 = a_0 = x$
$q_1 = -6$
$q_2 = -20$
$q_3 = -42$
$q_4 = -72$
...

Im folgenden Beispiel soll als grobe Näherung nur mit insgesamt 3 Stellen für den Wert $x^2 = u$ gerechnet werden. Der Startwert x ist aber möglichst genau im EW einzustellen! Es wird sich zeigen, daß schon mit geringem Aufwand Näherungslösungen mit 3-stelliger Genauigkeit möglich sind.

10.8.1. Beispielaufgabe: **sin(45°) = ?**

45° entspricht $x = 45° x \; \pi / 180° =$ **0,785398**

Quadrierung von x: $x^2 = u =$ **0,6169...**

Rechentableau an der Rechenmaschine: **bzgl. sin(0,785398)**
Alle Zählwerke an der Maschine werden gelöscht.

				▼				
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	1	0	0	0	0
					▼			
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	9	0	0	0
						▼		
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	8	7	0	0
							▼	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	8	6	9	0
								▼
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	8	6	9	2
							▼	
	8	7	6	5	4	3	2	1
UW	0	0	0	0	8	7	3	2

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW					0'	7	8	5	3	9	8	0	0	0	-	-	-	-	↑	
RW					0'	7	8	5	3	9	8	0	0	0'	0	0	0	0	1x	0,7854 wird notiert
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW						0	6	1	6	9	9	9	9	9	4	-	-	-	↓	
RW					0'	7	2	3	6	9	8	0	0	0'	6	0	0	0	1x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW							0	6	1	6	9	9	9	9	9	4	-	-	↓	
RW					0'	7	0	5	1	8	8	0	0	0'	7	8	0	0	3x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	
EW								0	6	1	6	9	9	9	9	9	4	-	↓	
RW					0'	7	0	4	5	7	1	0	0	0'	7	8	6	0	1x	
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW									0	6	1	6	9	9	9	9	9	4	↑	
RW					0'	7	0	4	6	9	4	4	0	0'	7	8	4	8	2x	0,7047 wird notiert
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+	
EW								0	6	1	6	9	9	9	9	8	0	-	↑	
RW					0'	7	0	7	1	6	2	4	0	0'	7	0	4	8	4x	

Wird der Rechengang an dieser Stelle abgebrochen, so liegt das Ergebnis ≈ 0,7072 im RW vor.

Das genaue Ergebnis lautet: sin(45°) = **0,707106781...** [elektr. Taschenrechner]
Somit liefert der reduzierte Rechengang ein auf 3 Stellen genaues Ergebnis (rel. Fehler ca. 0,013%).

Empfehlung:
Bei Winkelwerten größer 45° kann man den Vorteil nutzen, daß die Funktionen von Sinus und Kosinus zueinander um 90° (bzw. $\pi/2$ rad) verschoben sind. Denn es gilt:

bei Winkeln zwischen 0....90°: $\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha)$ oder $\cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha)$
bzw. im Bogenmaß (rad): $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$] oder $\cos(x) = \sin(\pi/2 - x)$

Da die Annäherung an einen Grenzwert bei kleinen x-Werten schneller erfolgt als bei großen, sollte möglichst mit der Funktion gerechnet werden, die den kleineren Winkelwert beinhaltet.

Beispiel:

Statt mit sin(72,5°) zu rechnen, sollte eher die Funktion cos(17,5°) verwendet werden.
Statt mit cos(72,5°) zu rechnen, sollte eher die Funktion sin(17,5°) verwendet werden.

Ansonsten gibt es noch die Umrechnungsmöglichkeiten:

bei Winkeln zwischen 0....90°: $\sin(\alpha) = \sqrt{[1-\cos^2(\alpha)]}$ oder $\cos(\alpha) = \sqrt{[1-\sin^2(\alpha)]}$

bzw. im Bogenmaß (rad): $\sin(x) = \sqrt{[1-\cos^2(x)]}$ oder $\cos(x) = \sqrt{[1-\sin^2(x)]}$

Dazu ist es aber nötig, eine nachträgliche Quadrierung und Wurzelrechnung auszuführen, wodurch sich der Aufwand wiederum erhöht. Konvergenz und zusätzliche Rechengänge sind daher gegeneinander abzuwägen.

10.9 Übersicht von q-Relationen der bisher behandelten Funktionen:

Um einen gesamten Überblick der q-Relationen zu ermöglichen, sind hier nochmal alle Werte in einer Gegenüberstellung zusammengetragen:

Funktion:	e^x	**sin(x)**	**arcsin(x)**	**½ ln(x)**	**arctan(x)**	**cos(x)**
		$[u = x^2]$	$[u = x^2]$	$[u = ((x-1)/(x+1))^2]$	$[u = x^2]$	$[u = x^2]$
wobei:			$\lvert x\rvert \leq 1$	$x > 0$	$\lvert x\rvert \leq 1$	
q_0 ->	1	x	x	(x-1)/(x+1)	x	1
q_1 ->	2	-6	6	3	-3	-2
q_2 ->	3	-20	2,2	1,67	-1,67	-12
q_3 ->	4	-42	1,68	1,4	-1,4	-30
q_4 ->	5	-72	1,47	1,29	-1,29	-56
q_5 ->	6	...	...	1,22	-1,22	-90
q_6 ->	7	...	...	1,18	-1,18	...

11 Der abschließende Kommentar zum Skript:

Das vorliegende Skript soll einzig und allein als ein Leitfaden verstanden werden, um Rechengänge auf einer Vierspezies-Maschinen ausführen zu können. Mit den verschiedenen Beispielaufgaben wollte ich das Ziel verfolgen, die diversen Berechnungsmöglichkeiten musterhaft zu veranschaulichen. Dabei kann es natürlich vorgekommen sein, daß sich an der einen oder anderen Stelle im Text ein Druckfehler eingeschlichen hat oder sich sogar Inkorrektheiten im Rechengang ergeben haben. Wer sich also intensiver mit dieser Materie auseinandersetzen will bzw. noch tiefer in die Thematik der Berechnungen einsteigen möchte, wird ohnehin nicht daran vorbeikommen, in Eigeninitiative weitere Rechenbeispiele zur Übung zu ersinnen. Gerade was den Themenkomplex der Potenzreihen-Funktionen angeht, benötigt man eine gewisse Übung, Konzentration und natürlich ein sicheres Händchen bei den Einstellungen an der Maschine. Letztenendes kommt es jedoch darauf an, daß der Anwender ein Verständnis dafür entwickelt, was bei den durchgeführten Rechenschritten überhaupt abläuft. Mechanische Rechenmaschinen sind keine Wunderwerke, die am Ende auf rätselhafte Weise ein Ergebnis abliefern. Vielmehr muß man dem Bediener der Rechenmaschine eine Bewunderung aussprechen, wenn dieser es mit mathematischer Raffinesse und mit seiner geübten Geschicklichkeit versteht, in Handumdrehen beliebige Berechnungen an der Maschine durchzuführen. Auch ich selbst, der ja sämtliche Aufgaben im Skript nicht nur einmal gerechnet hat, muß mich leider dem Problem unserer heutigen modernen Zeit beugen. Und das Problem besteht darin, daß man der Versuchung selten lange widerstehen kann, nach jenen herkömmlichen elektronischen Taschenrechnern zu greifen, wodurch das Rechnen mit den alten Maschinen vernachlässigt wird. Deshalb nutze ich diese Vorlage gelegentlich selbst, um in stillen Stunden und in aller Ruhe das alte Handwerk der Rechenkunst wieder aufzupolieren.

Herdecke, den 08. Mai 2005 Kai-Uwe Ekrutt